Le calcul de l’UA par le transit de Vénus

L’unité astronomique (UA) unité de mesure de distance utilisée en astronomie, notamment à l’intérieur du système solaire a longtemps été une unité sans correspondance avec les autres unités de mesures de distances utilisées sur l’ensemble de la Terre par tous ses occupants. La raison en est très simple, nous ignorions ce qu’elle représentait en km, toises, arpents…. ou tous autres unités de mesures de longueur. L’UA est égal à la distance moyenne séparant la Terre du Soleil, et tant que cette distance n’a pas pu être connue dans une autre unité de mesure, l’UA par elle-même n’était qu’une mesure relative. Sur le plan pratique elle avait tout de même une grande utilité car elle permettait de savoir les distances relatives des planètes au Soleil. Par exemple, grâce à la troisième loi de Kepler les astronomes savaient que Mars était 50% plus loin du Soleil que ne l’est la Terre, que Jupiter en était 5 fois plus éloignée,… mais sans savoir ce que cela représentait en km ou en mètres. Donner une valeur de type kilométrique à l’UA c’était comprendre notre place dans le système solaire et estimer la distance qui nous sépare des autres étoiles avec une précision raisonnable à partir de calculs trigonométriques très simple. En effet, maintenant que nous savons que l’UA égal 150 millions de km, nous savons qu’à 6 mois d’intervalle la Terre occupe des positions espacées de 300 millions de km, de quoi donner une base de référence à un triangle céleste vers les étoiles et connaître les distances qui nous en séparent.

Aujourd’hui la distance Terre-Soleil est connue avec une grande précision et n’est plus « mesurée » occasionnellement lors d’un transit, mais continument avec les satellites en orbite autour des différentes planètes et du Soleil lui-même, et par des moyens indépendants des transits, grâce à des appareils perfectionnés comme les radars par exemple.
Mais les transits ne sont pas négligés pour autant bien que leur intérêt ne soit plus d’affiner la mesure de l’UA. C’est grâce au transit de planètes comme Vénus, mais aussi la Terre dont on connait maintenant parfaitement la composition des atmosphères à toutes les altitudes, que les spectromètres et d’autres instruments peuvent être parfaitement étalonnés. Et cet intérêt est grandissant depuis que la découverte de planètes extrasolaires laisse supposer que certaines pourraient disposer d’atmosphères que les transits devant leur étoile pourraient permettre d’analyser, notamment dans le but d’y détecter des molécules signatures de la présence d’êtres vivants, au sens où on l’entend…. sur Terre. Si depuis le sol nous sommes tributaire de la rareté des transit des planètes intérieures, notamment ceux de Vénus, en vérité nous pouvons observer des transits de cette planète de façon quasiment continue depuis des satellites à l’orbite fortement inclinées sur l’écliptique tant que Vénus reste au voisinage de la Terre. Mais si le besoin de la permanence tout au long de l’année de l’observation des transits de Vénus devait se faire sentir, ce ne serait pas un problème d’envoyer un satellite en orbite autour de cette planète à l’altitude souhaitée et sur une orbite inclinée, ces deux paramètres étant optimisés pour ce que l’on cherche à observer. Il reste que pour des raisons historiques c’est pour expliquer comment les anciens ont tiré profit des transits planétaires que je vous ai préparé ce document.

Il existe deux planètes qui peuvent s’aligner sur la ligne de visée depuis la Terre vers le Soleil, Mercure et Vénus, donc toutes deux sont susceptibles d’être utilisées avec les méthodes d’estimation de distances à l’aide des transits (on dit aussi passages). Mercure présente plus de transits que Vénus mais sa proximité du Soleil, à 61 % de la distance qui nous sépare du Soleil, nous fournit des résultats moins précis avec des mesures pourtant aussi minutieuses. C’est pour cette raison qu’il lui est préféré Vénus qui n’est qu’à 28% de cette distance.

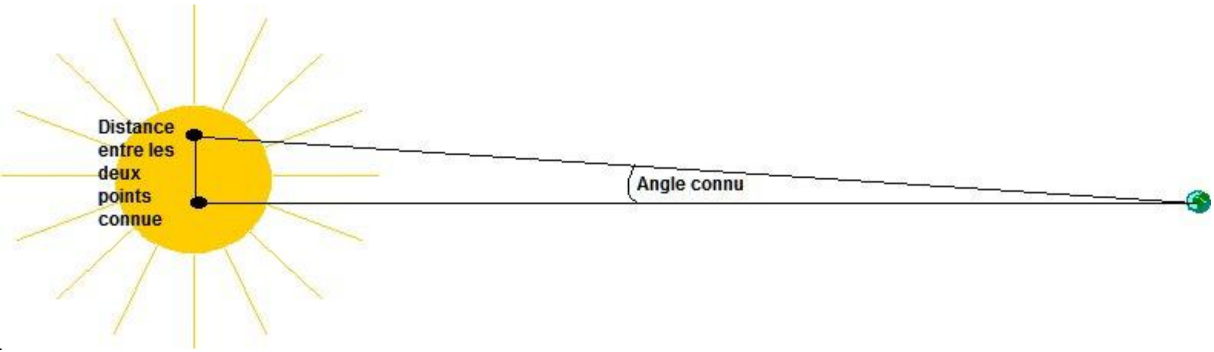
Des méthodes permettant de tirer parti du passage d’une planète intérieure il en existe plusieurs, qui sont plus ou moins compliquées à mettre en œuvre et nous retiendrons la méthode dite de Haley du nom de son inventeur, lequel avait aussi inventé une comète, bien que l’on dise plutôt découvreur dans ce cas.

Cette méthode repose surtout sur des mesures de temps qui sont ensuite traduites en mesures angulaires, puisque la cheville ouvrière de la méthode est la trigonométrie.

Le résultat ne s'obtient pas directement à partir des mesures de temps observées mais à la suite d'un long raisonnement qui consiste à résoudre consécutivement une suite de problèmes indépendants. Le résultat obtenu reste malgré tout approximatif, quel que soit le soin apporté aux mesures de temps, puisqu'il sera entaché de causes que la méthode ne prend pas en compte. En effet, les mesures dont il s'agit sont des mesures de temps séparés par des durées de plusieurs heures, et durant ce temps, la Terre a tourné sur elle-même, impliquant un changement de position pour les observateurs, et comme Vénus, changé de position sur leurs orbites avec une vitesse orbitale pour Vénus supérieure de 18% à celle de la Terre. Autant de phénomènes introduisant des biais qui sont ignorées par la méthode.

Au niveau du principe il s'agit d'une solution très simple qui consiste à trouver le coté d'un triangle (La distance Terre-Soleil) dont on connaît un autre côté qui lui est perpendiculaire (La distance entre deux points sur le Soleil) et l'angle sous lequel ces deux points sont observés (donc depuis la Terre). Il ne s'agit que d'un triangle-rectangle et l'affaire se présente de la façon suivante :

Démonstration 1



La trigonométrie donne la solution simplement :
La distance entre les deux points divisée par la tangente de l'angle d'observation donne la distance entre l'observateur et le Soleil. On peut même ajouter que l'angle étant très petit, on peut remplacer la tangente par l'angle lui-même s'il est exprimé en radians. Réciproquement, en multipliant la distance qui sépare l'observateur du Soleil par l'angle d'observation donne la distance séparant les deux points.

Il demeure cependant un problème de taille à résoudre avant de répondre à cette question :
Nous ne connaissons pas la distance entre ces deux points, et d'ailleurs, d'où sortent-ils ?

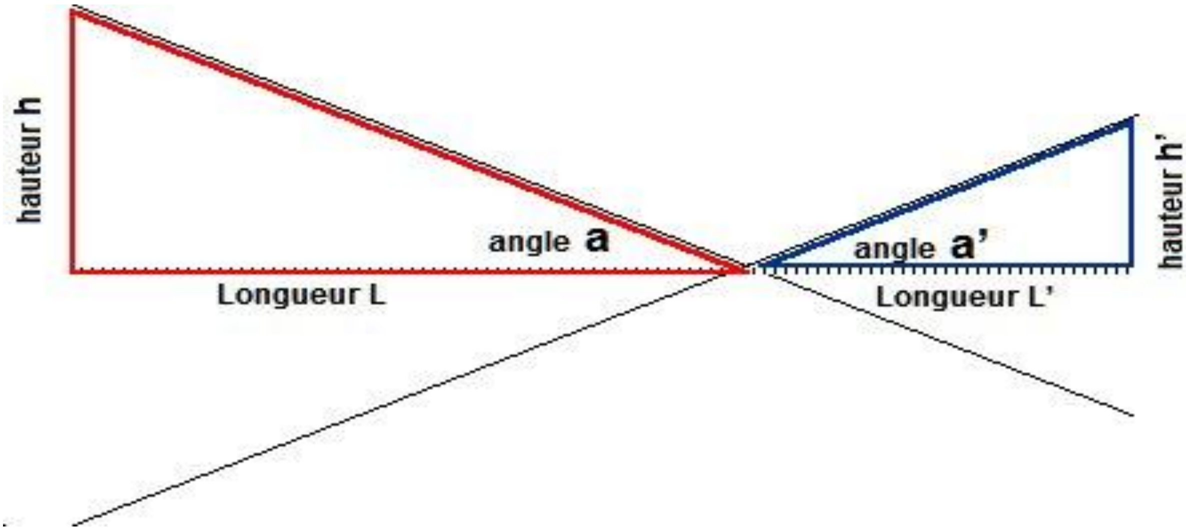
Nous allons donc avancer pas à pas en résolvant consécutivement tous les problèmes qui vont se poser au fur et à mesure de notre avancée dans cette recherche. Mais au paravent nous allons faire une petite exploration dans la géométrie pour démontrer certaines identités auxquelles nous devront faire appel, et il vaut mieux les connaître et mieux encore, les comprendre, avant de les appliquer.

Démonstration 2 :

On constate que les 4 angles formés par deux lignes qui se croisent sont égaux deux à deux et que cette égalité s'applique sur les paires d'angles opposés.
Sur les deux figures, on « voit » que les angles **a** et **c** sont égaux entre eux comme le sont **b** et **d**.
Pour rendre cette démonstration plus imagée on peut imaginer l'intersection des deux droites comme un axe et manœuvrer ces deux droites en faisant varier leurs angles pour constater que les angles opposés sont toujours égaux.

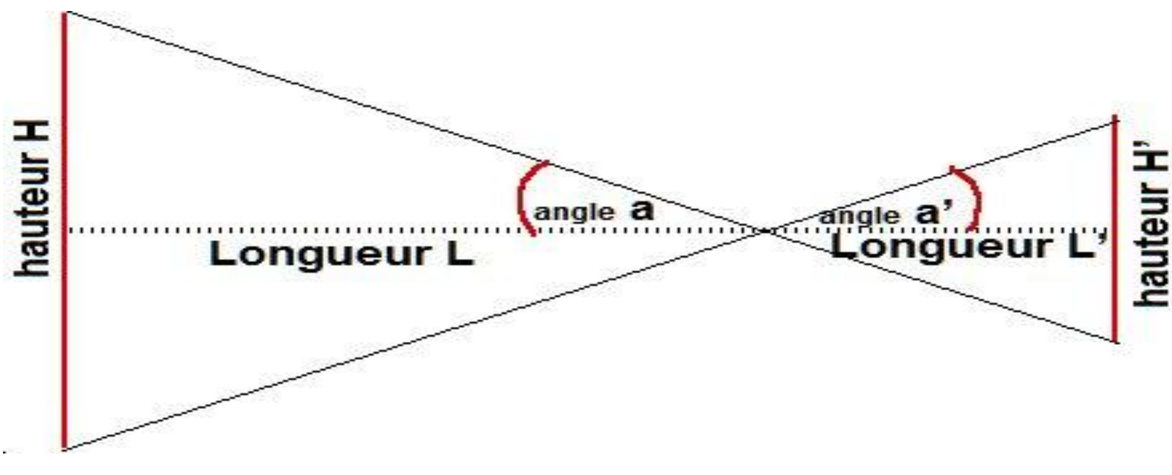
Maintenant regardons la figure suivante qui ressemble à un joli demi papillon boiteux aux ailes bicolores traversées par une médiane (L et L') :

Démonstration 3



Si vous avez retenu la deuxième démonstration vous savez que **a = a'**, et si vous avez retenu la première démonstration vous savez qu'en multipliant l'angle **a** par la longueur **L** vous obtenez la hauteur **h**, et ce qui est vrai pour **a**, **L**, et **h** l'est aussi pour **a'**, **L'**, et **h'**.
Donc **h = a** x **L** et **h' = a** x **L'**
En toute rigueur il faudrait dire **h = tg a** x **L** et **h' = tg a** x **L'** mais puisque nous avons que dans le problème que nous avons à traiter « la distance de la Terre au Soleil », cette distance est très grande et la distance entre les deux points que nous aurons à observer sur le Soleil comparativement très petite, alors l'angle d'observation étant lui aussi très petit, on confondra l'angle lui-même, exprimé en radian, avec sa tangente.

A partir de **h = a** x **L** et **h' = a'** x **L'** nous pouvons écrire **h/L = h'/L'** et si nous multiplions par 2 les numérateurs de ces deux fractions égales entre elles, nous ne changeons pas cette égalité.
Avec **H = 2h** et **H' = 2h'** nous avons **H/L = H'/L'** ce qui représente un papillon complet bien que toujours boiteux :



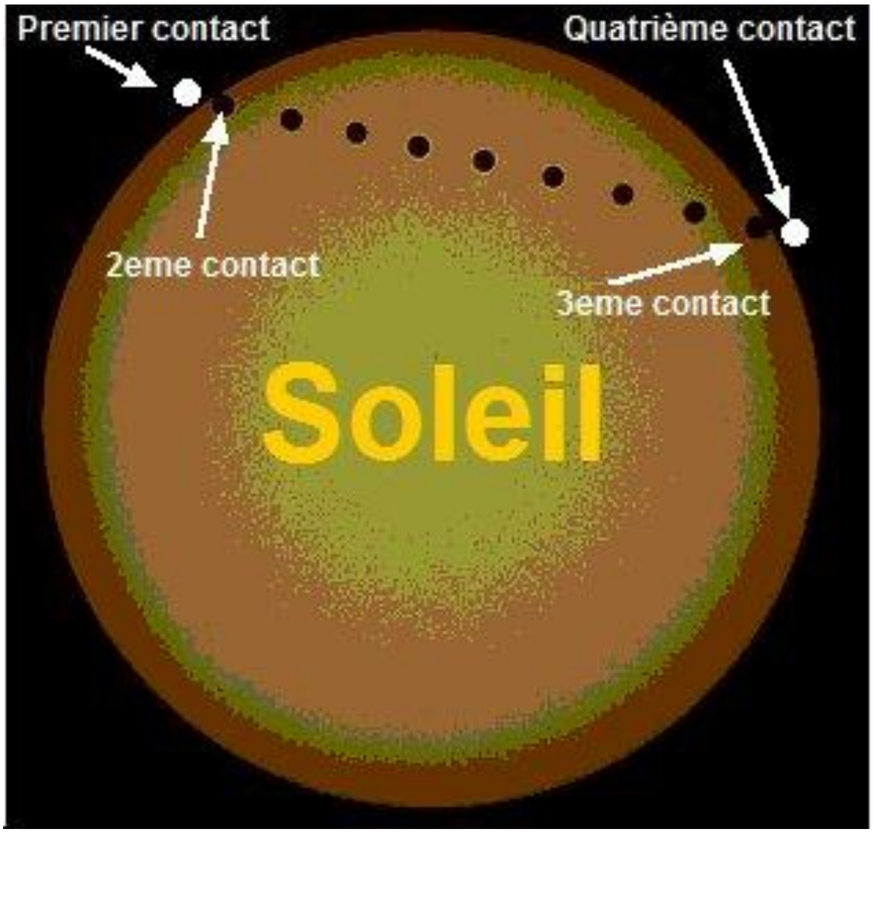
Supposons que nous connaissions **H'** mais pas **H** (ou réciproquement **H** mais pas **H'**) et que nous connaissions **L** et **L'** (ou simplement leur rapports réciproques **L/L'** ou **L'/L**). Nous pouvons alors connaître le **H** ou **H'** qui nous manque par une simple multiplication à partir de **H/L = H'/L'** nous obtenons **H = H'L / L'**
Mais nous savons aussi grâce à une vieille litanie à laquelle je ne comprenais rien autrefois à l'école, me demandant qui étaient ces extrêmes et ces moyens qui devaient quelquefois se produire « ***Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*** » que si **H/L = H'/L'** alors **HL' = H'L**
Retenez bien ceci car c'est une des clefs du calcul de l'UA.

Voilà, nous avons fait à peu près le tour des prérequis et nous pouvons nous attaquer au plat de résistance.

Revenons à ces deux points sur le Soleil représentés sur l'illustration de la démonstration 1, d'où sortent-ils ? En fait, ils sont fictifs et représente symboliquement deux lignes dont l'écartement nous importe. Ainsi, si nous savions le nombre de km qui les sépare avec une simple mesure de l'angle (démonstration 1) le problème serait réglé. On voit donc que la clef du problème se trouve dans la connaissance de la distance qui sépare ces deux points, et nous allons nous attacher à la déterminer.

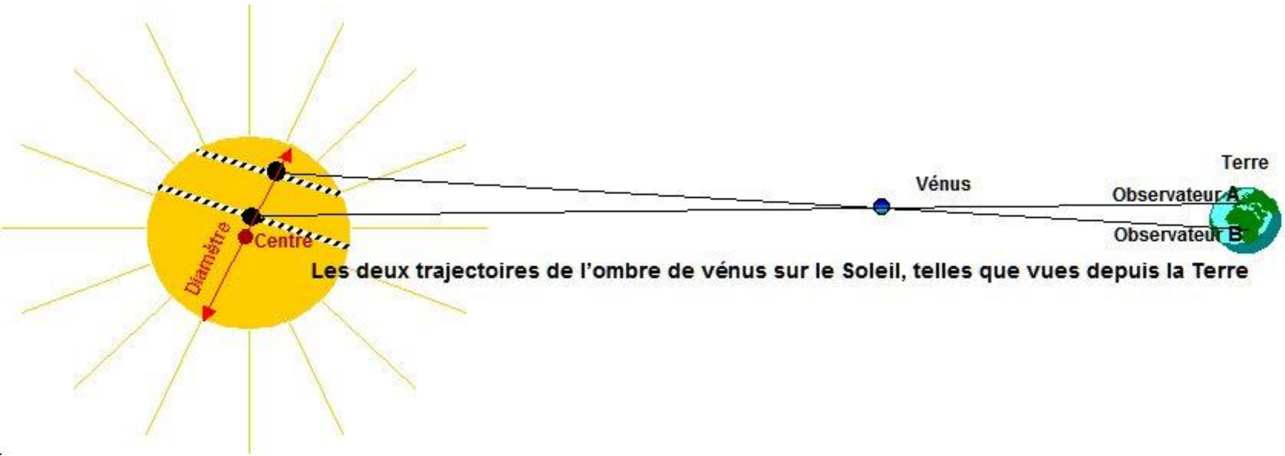
Reprenons la procédure de la méthode de Haley.

Elle consiste depuis deux lieux de la Terre les plus éloignés possible en latitude à mesurer le temps que la projection du disque de Vénus va mettre pour effectuer la traversée du disque solaire. Chaque observateur devra noter scrupuleusement deux temps. Il s'agit du moment où l'ombre de Vénus se détache du limbe pour commencer sa traversée du disque solaire et du moment où il la termine en affleurant le limbe opposé. On appelle ces bornes contacts 2 et 3 et ils sont choisis parce qu'ils sont les moins difficile à observer. Chaque observateur déclenche le départ de son chronomètre au contact 2 tel qu'il l'observe depuis son lieu d'observation et l'arrête au contact 3. La différence entre les deux représente le temps de traversée.



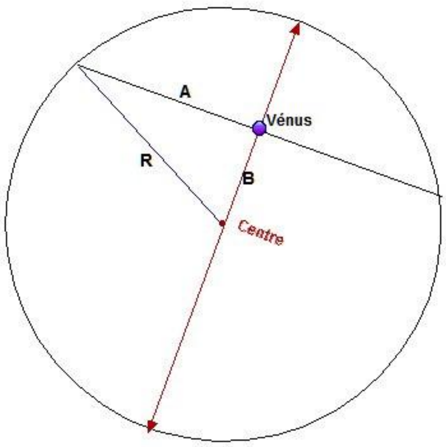
Sur l'image ci-dessus représentant le transit de 2004 on voit que la corde tracée par le passage de Vénus est assez loin du diamètre dont des passages antérieurs ont tout de même permis de montrer que des trajectoires au voisinage du diamètre de 32' angulaires se parcouraient en 8 heures (28800 secondes), ce qui est une indication intéressante pour la suite de l'exposé. En effet, le diamètre solaire est connu en valeur angulaire, laquelle varie en fonction de la date dans l'année puisque la trajectoire de la terre n'est pas un cercle mais une ellipse (mais en vérité il varie également en fonction de la longueur d'onde à laquelle on effectue la mesure). Cette traversé de Vénus en 8 heures au niveau du diamètre solaire va nous permettre de convertir les mesures de temps que nous allons faire en mesures angulaires, ce qui est un premier pas avant de les convertir en km.

Les deux observateurs étant situés sur Terre sur des latitudes différentes vont voir la projection de Vénus sur des cordes différentes :



Bien sûr, les échelles tant de la taille des objets en présence que des distances qui les séparent ne sont pas respectées mais permettent de faire tenir le principe schématisé dans la largeur de la page. A ce stade le problème consiste à estimer en la distance séparant les deux points noirs (ombres de vénus. On voit qu'ils suivent des trajectoires parallèles qui sont symétriques par rapport au diamètre du Soleil qui leur est perpendiculaire. C'est lorsque ces deux points sont positionner sur ce diamètre qu'il est le plus facile de mesurer cette distance. Le but est de connaître la distance de ces deux points par rapport au centre du disque (ou du limbe) et de faire ensuite la différence entre ces deux résultats puisqu'elle est égale à ce que l'on cherche, la distance angulaire entre ces deux points.

Plusieurs méthodes permettent cette mesure mais contentons-nous de la plus simple qui fait appel au théorème de Pythagore. Ne considérons qu'une seule de ces deux trajectoires pour déterminer la distance de « son point » au centre du disque solaire (il suffira de faire la même chose pour ce qui concerne l'autre trajectoire). Nous avons la figure suivante :



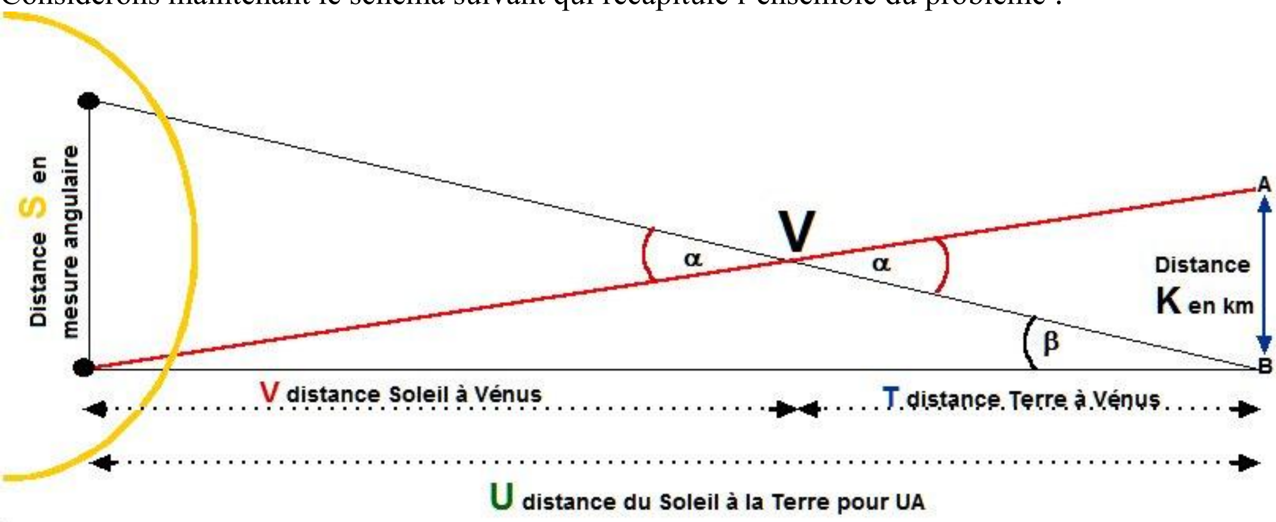
Nous cherchons à déterminer B en connaissant R (le rayon solaire = 16’). Il nous faut donc déterminer A à partir des mesures de chronométrage qui a donné le temps de passage entre les contacts 2 et 3 de l’observateur de ce transit et nous pourrons alors référer au théorème de Pythagore pour déterminer la distance à laquelle se situe vénus par rapport au centre du Soleil.

Il est maintenant temps d’introduire des mesures ayant réellement été chronométrées lors du passage de Vénus dans le passé. Les plus anciens furent des échecs pour diverses raisons, mais le premier passage ayant vraiment porté ses fruits, c’est-à-dire ayant contribué à une amélioration décisive de la connaissance de l’UA fut réalisé le 3 juin 1769 avec un observateur A, à Varda (Suède) et l’autre, B, à Tahiti. La différence de latitude entre ces deux lieux d’observation est de **6500 km**. Depuis Varda, l’observateur A a mesuré un temps de transit de ***5h56mn1s*** soit un temps en secondes de (5x3600 + 56x60 + 1) = ***21 361*** secondes. L’ombre de Vénus a donc mis la moitié de ce temps pour se retrouver à mi-parcours au point où elle est représentée sur le schéma ci-dessus soit ***10 680,5*** secondes que nous devons convertir en grandeur angulaire. Sur le schéma ci-dessus, le segment «A» mesure donc **32’ / 28800 x 10680,5 = 11,867’**
Le rayon R mesurant 16’ il ne reste plus qu’à appliquer le fameux théorème de Pythagore pour en conclure la longueur du segment «B» du schéma : 10,732’ = $\sqrt{16^2 - 11{,}867^2}$ qui représente la distance angulaire entre le centre du Soleil et l’ombre de Vénus vue depuis Varda

Depuis Tahiti l’observateur B a chronométré un temps plus court, puisque la distance parcourue par l’ombre de Vénus su le Soleil se situe sur une corde plus petite. Il a noté ***5h44mn1s*** soit un temps en secondes de (5x3600 + 44x60 + 1) = ***20 641*** secondes.
Par les mêmes opérations que celles faites à l’aide des mesures de l’observateur A de Varda, nous obtenons pour «A’» (le même segment que A mais non représenté pour ne pas alourdir la figure) : **32’ / 28800 x 10320,5 = 11,467’** et en poursuivant pour obtenir B’ similaire à B de la corde la plus longue : 11,158’ = $\sqrt{16^2 - 11{,}467^2}$ qui représente la distance angulaire entre le centre du Soleil et l’ombre de Vénus vue depuis la plage de Pointe Vénus sur la commune de Mahina à Tahiti.

La différence entre ces deux résultats donne l’écart angulaire entre ces deux points vu depuis la Terre, soit 11,158 – 10,732 = **0,426’** c'est-à-dire l’angle **β** sur le schéma ci-dessous. Comme convenu plus haut, compte tenu de la petitesse de cet angle, nous pouvons le convertir en radians afin de l’utiliser lui-même dans les calculs sans devoir passer par les fonctions trigonométriques.
Un demi-cercle correspondant à 180° soit (180 x 60’ = 10800’) est égal à **π**,
0,426’ = π /10800 x 0,426 = 0,000123918 rad

Considérons maintenant le schéma suivant qui récapitule l’ensemble du problème :



Nous savons deux choses : **β** = 0,000123918 rad et aussi **K** = 6500 km.

D'après la démonstration 1 (au début) nous avons aussi que **S/** β = **U**

Et si vous avez bien retenu ce que je disais être une des clefs du calcul de l'UA à la fin de la démonstration 3 démontrant **(HL' = H'L)** transposez le sur le schéma ci-dessus et vous avez :

V x K = T x S et en divisant les deux membres de cette équation pas **T** nous avons : $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}}\ \mathbf{K} = \mathbf{S}$

C'est cette équation qui va nous permettre de transformer la grandeur angulaire séparant les deux ombres de Vénus en grandeur kilométrique.

V et **T** qui sont respectivement les distances séparant Vénus du Soleil et de la Terre nous sont inconnues (sinon il suffirait de les cumuler pour obtenir l'UA) mais ce qui importe ici est le rapport entre les deux, et cela nous le connaissons depuis Kepler à partir de la période orbital observée, et donc connue, pour les deux planètes :

V $= \sqrt[3]{\frac{224{,}701^2}{365{,}256^2}} = 0{,}72333325$ Alors **T** = 1 - 0,72333325 = 0,27666675

Le rapport $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{0{,}72333325}}{\mathbf{0{,}27666675}}$ **= 2,614456743**

$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}}\ \mathbf{K} = \mathbf{S}$ s'écrit alors **2,614456743 x 6500 km = 16993,96883 km**

Il ne reste plus alors qu'à appliquer « l'évidence trigonométrique de la démonstration numéro 1 :
La distance entre les deux points divisée par la tangente de l'angle d'observation donne la distance entre l'observateur et le Soleil.

U (UA) = 16993,96883 / 0,000123918 = <u>137 138 824</u> km

A noter tout de même, l'UA n'est pas comme souvent dit et écrit la distance moyenne de la Terre au Soleil dont les fluctuations de l'orbite ne sont pas parfaitement connues et changeantes dans le temps, mais le demi grand axe de l'orbite d'une planète (fictive, mais autrefois la Terre) de masse nulle dont le mouvement moyen est égal à K(*) radians par jour (CF : L'Astronomie N° 51, Jean-Eude Arlot, IMCCE-CNRS).

(*) K est la constante de Gauss (0,985 607 668 601 425 degrés/jour). Les unités de temps, de masse, et la constante de gravitation G réfèrent aux unités du système International.