Serge Rochain

La loi de gravitation explique Kepler et pèse les planètes

Le génie de Newton

Lois de Kepler

Détermination de la masse des corps célestes

Détermination des temps orbitaux

Détermination des distances orbitales

Page de commentaire de la page précédente

Durant cet exposé nous allons retrouver plusieurs situations que nous avons traité lors de la première partie mais souvent avec des variantes, cela en fera une excellente révision

Cette présentation vise en premier lieu à expliquer la loi de Kepler comme conséquence de la loi de gravitation, fondement de la mécanique classique, et fait donc suite à l'exposé sur la mécanique céleste première partie.

Les méthodes de calcul de la mécanique céleste s'étendent de la trigonométrie aux calculs de temps et de vitesses pour la détermination de la position des astres dans la dynamique de leurs déplacements

Page de commentaire de la page précédente

L'objectif principal de cet exposé d'initiation est de démontrer que les lois de Kepler, notamment la 3 em loi qui nous a servi à estimer les distances auxquelles les planètes se situent par rapport au Soleil, ne sont pas des lois fondamentales mais ne sont que des conséquences de la loi de gravitation dont on étudiera une forme simplifiée permettant d'estimer la masse des corps autour desquels orbite au moins un autre corps. Mais dans une autre série de 4 exposés consacrés entièrement à la gravitation nous en verrons d'autres applications plus élaborées, notamment l'estimation des masses individuelles des étoiles doubles.

Expression de la loi de gravitation

$$F = G \frac{m1\, m2}{d^2}$$

Cette loi exprime, en newtons (N*), que deux corps de masse ***m1*** et ***m2*** s'attirent avec une force ***F*** (N) qui est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance ***d*** qui les sépare

G **est la constante de gravitation qui relie les différentes unités employées**.

G = 6,67*10⁻¹¹ dans le Système International (SI), dans lequel le temps s'exprime en seconde et les distance en mètres.

*) **Un newton est la force colinéaire au mouvement qui, appliquée pendant une seconde à un objet d'un kg, en modifie la vitesse d'un mètre par seconde**.

Page de commentaire de la page précédente

- Cette loi est fondamentale et sa portée couvre un grand nombre de domaines dont on pense souvent qu’ils en sont éloignés.
- Elle est le fondement de la mécanique classique qui regroupe la statique, la cinématique et la thermodynamique telle que comprise par Galilée.
- Plus tard la mécanique s’analysera de façon plus détaillée et plus complexe allant de la mécanique quantique à la mécanique céleste en traversant diverses spécialités.

Ainsi une pomme de masse m1 est attirée par la Terre de masse m2 avec une force F, mais la Terre est attirée par la pomme avec la même force F.

Dire que c'est la pomme qui tombe sur la Terre et non la Terre qui tombe sur la pomme est une question de point de vue.

Un minuscule microbe se promenant sur la pomme verrait la Terre se précipiter sur lui. Il reste que nous avons pris l'habitude de considérer notre référentiel immobile. Et bien campés sur nos deux pieds au sol nous nous assimilons à l'apparent immobilisme de la Terre et nous considérons donc que c'est bien la pomme qui tombe sur la Terre.

La convention est que le plus petit tombe sur le plus gros

Mais gardons bien à l'esprit que c'est là une pure convention et non une réalité, car c'est avec cette vision égocentrique que nous avons longtemps considéré que c'est le Soleil, et aussi l'ensemble de l'Univers, qui tournent autour de la Terre

Page de commentaire de la page précédente

Avant d’avoir les idées plus claires sur cette question de référentiel, ce qui en constituait l’identité traduisait le narcissisme humain comme centre de tout.

Encore aujourd’hui pour une majorité des habitants de notre planète, celle-ci est le centre de l’Univers et l’homme le centre d’intérêt de la planète.

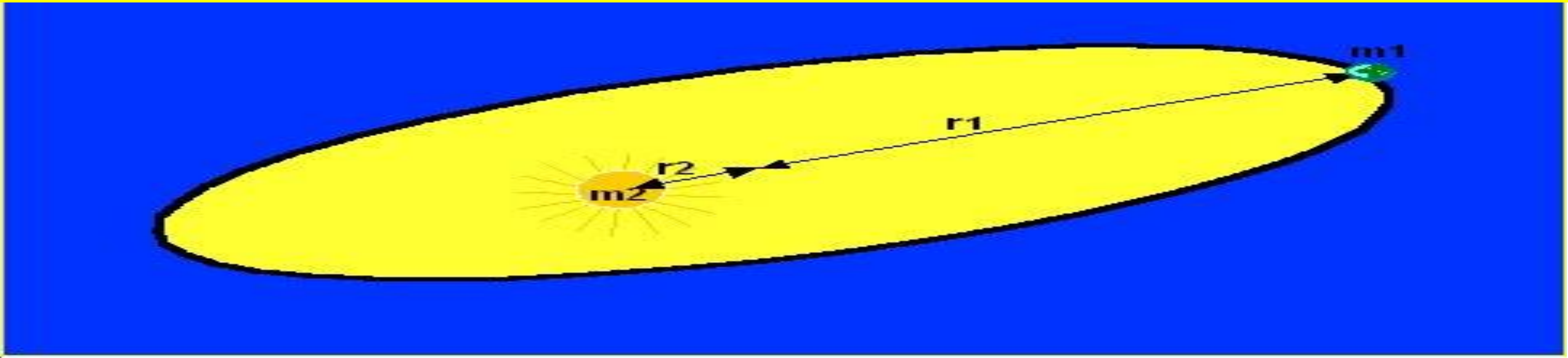
Nous n’avons pas encore vu un seul film de « science-fiction » dans laquelle des êtres venus d’ailleurs s’intéressent à autre chose qu’à l’espèce humaine, laquelle est toujours la cible de ses préoccupations, généralement belliqueuses.

Dans la nature les objets non tributaires de contraintes qui leur imposent un emplacement fixe, comme une pomme posée au sol, tournent les uns par rapports aux autres comme la Lune autour de la terre, ou la Terre autour du Soleil. Aussi, appliquée aux corps célestes, la loi de gravitation s'écrit plus souvent comme ceci :

$$F = G\frac{m1\,m2}{r^2}$$

Avec un *r* pour « rayon » à la place du *d* de « distance ». Ce *r* étant lui-même abusif puisque les orbites ne sont presque jamais des cercles mais le plus souvent des ellipses.

Cependant, en raison de leur faible excentricité et aux niveau où nous calculerons ces orbites nous pouvons nous satisfaire de cette approximation. En revanche il y a plus important à comprendre :



Page de commentaire de la page précédente

Une fraction de l'espèce humaine après avoir abandonné l'idée que le Soleil tourne autour de la Terre, a accepter l'idée toute aussi incongrue que c'était strictement l'inverse.

Donc sans comprendre vraiment le phénomène en cause.

Note : Dans l'équation $$F = G\frac{m1\,m2}{r^2}$$

r^2 est en réalité un terme composé $(r1+r2)^2$

Il existe une identité entre le produit de la masse par la distance des deux objets, ainsi nous avons m1 r1 = m2 r2

Le point de rencontre entre r1 et r2 se nomme « centre de masse » ou encore barycentre. Il caractérise un point précis dans l'espace autour duquel les deux masses m1 et m2 sont en orbite, et toujours de façon diamétralement opposé . Ainsi il n'est pas rigoureusement exact de dire que la Terre tourne autour du Soleil. Terre et Soleil tournent tous deux autour de ce point immatériel défini proportionnellement aux masses. Rapport des masses Terre/Soleil = 1/333000

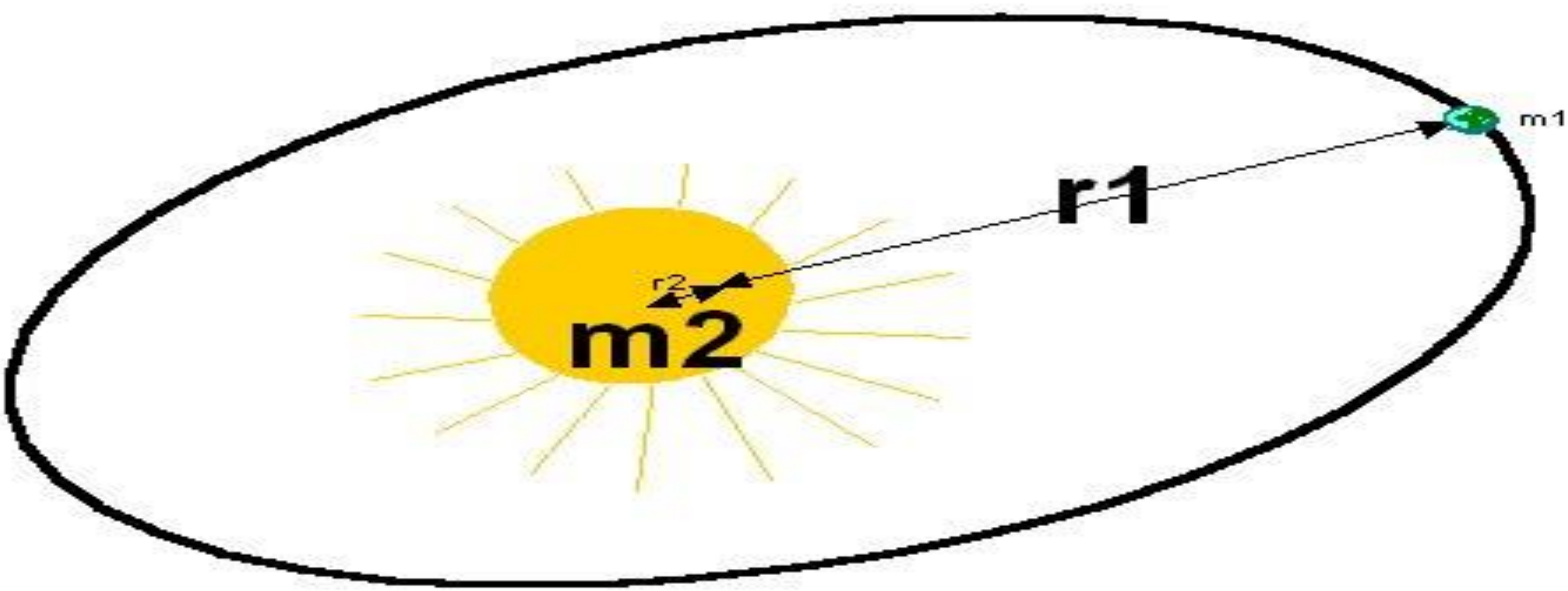
Page de commentaire de la page précédente

Ainsi, pour des objets de masses très différentes, le barycentre se trouve souvent être un point situé à l'intérieur du plus massif des deux comme c'est le cas pour les planètes et le Soleil et aussi pour toutes les planètes du système solaire et de leurs satellites pour celles qui en possèdent. Nous aurions une exception dans le système solaire si pluton était resté classé comme une planète car avec son satellite le plus important, Charon, le centre de masse commun se situe à plus de 1000 km au-dessus de la surface de Pluton

On démontre qu'il se confond avec le centre du Soleil lui-même tant sa masse est importante par rapport à celle de la Terre. Il est facile de déterminer ce point précis en appliquant ce rapport sur la distance de 150 millions de km entre le Soleil et la Terre.

150 000 000 / 333 000 = 450

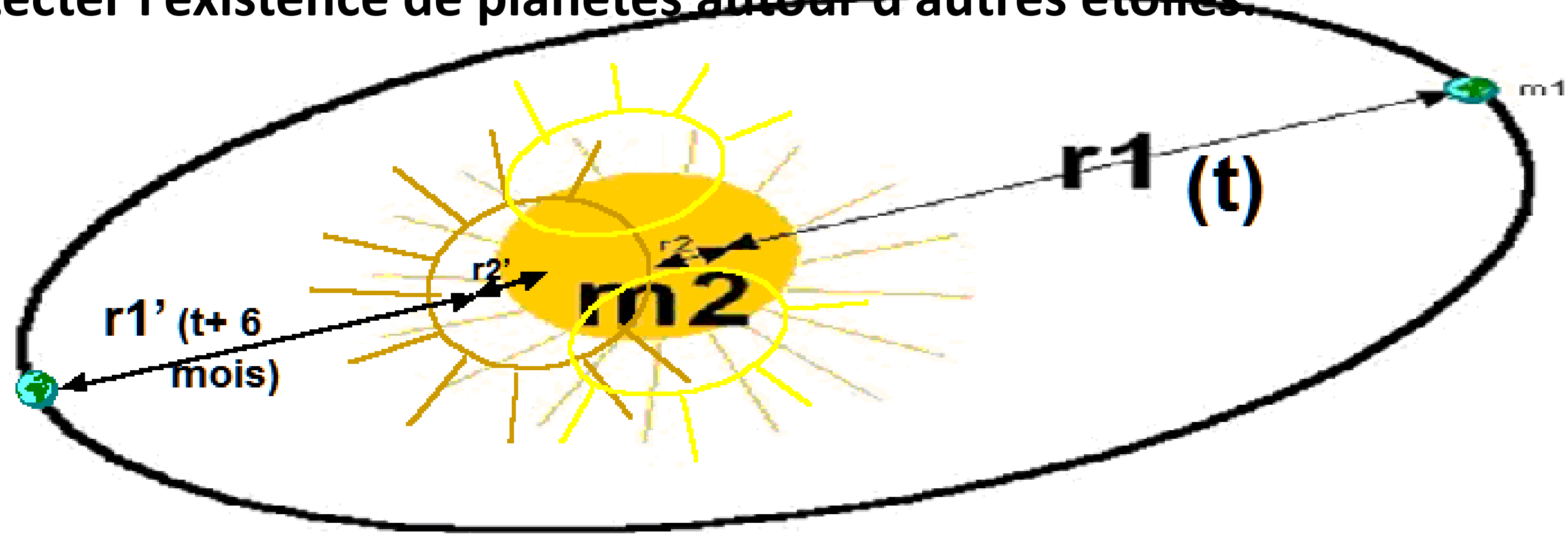
Ce point est donc situé à 450 km du centre du Soleil, dont le rayon est de 696 342km, en direction de Terre, c'est le point de rencontre des flèches r1 et r2 sur le schéma ci-dessous. ***Terre et Soleil tournent tout deux de façon diamétralement opposées autour de ce point virtuel.***



Page de commentaire de la page précédente

Mais vis-à-vis du Soleil qui représente à lui seul 99,9% de la masse de tout le système solaire, aucune planète n’est en mesure de partager un centre de masse qui lui soit extérieur.

Vu de très loin, depuis une planète orbitant autour d'une étoile lointaine, à cause de la présence de la Terre, le Soleil semble effectuer un mouvement de va et vient autour d'une position centrale avec une amplitude de 900 km ce qui est insignifiant et ne représente que 6 dix millièmes de son diamètre, c'est-à-dire une oscillation invisible à la distance des autres étoiles, même les plus proches. L'oscillation produite par Jupiter est 300 fois supérieure. Chaque planète provoque une oscillation qui donne l'impression que le Soleil gigote d'une façon désordonnée. C'est une des méthodes qui permet aujourd'hui de détecter l'existence de planètes autour d'autres étoiles.



Page de commentaire de la page précédente

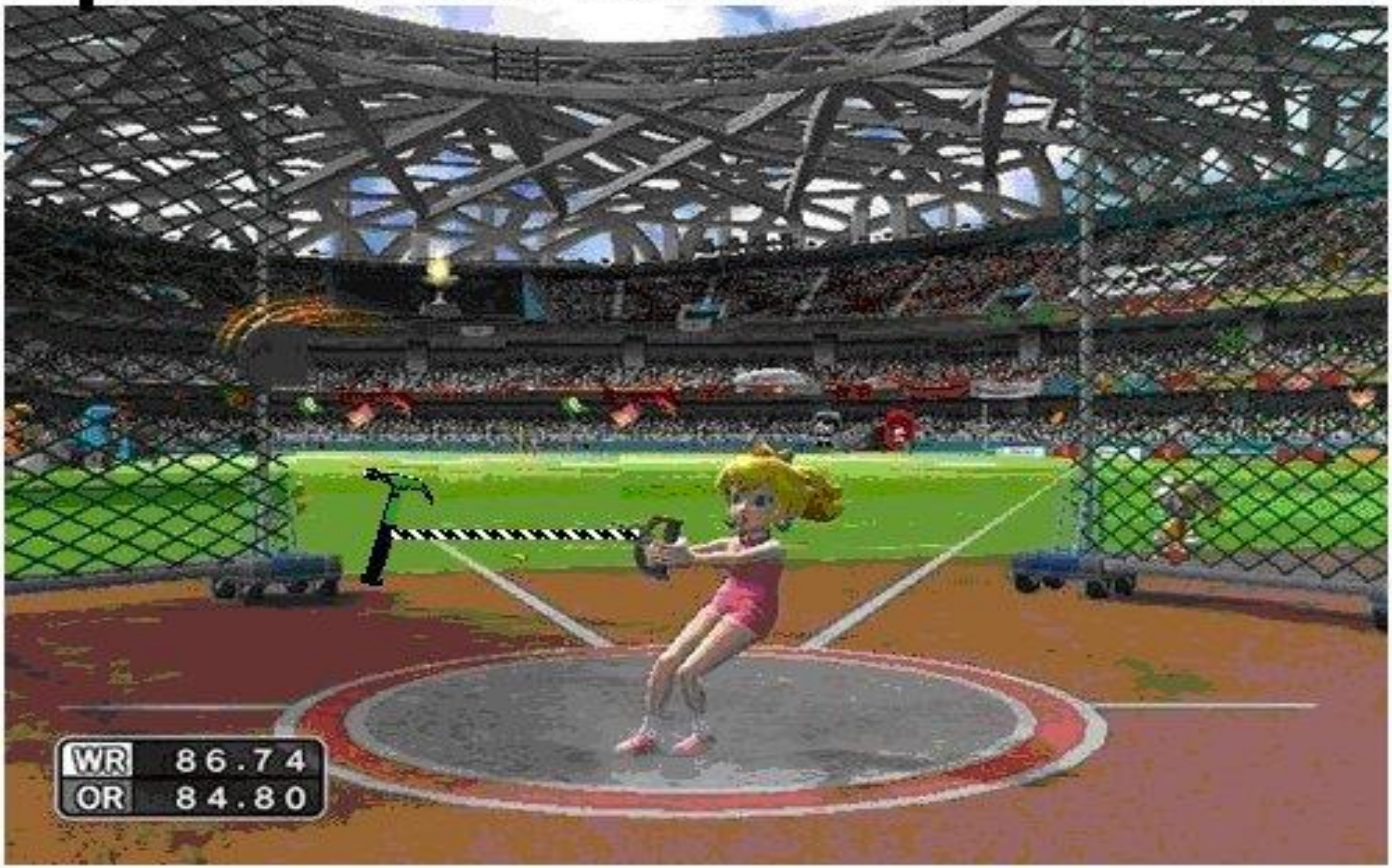
La plupart des planètes extra-solaire découvertes aujourd’hui l’on été par l’analyse des oscillations de leur étoile.

Une oscillation complexe de plusieurs mouvements imbriqués témoignent d’une système planétaire multiple.

Seules les planètes importantes sont capable de provoquer une oscillation visible depuis la Terre, cela explique que les premières planètes découvertes soient des géantes. Avec le progrès de l’instrumentation on détectera des planètes de plus en plus petites.

Analysons un mouvement bien connu que nous avons tous fait

Epreuve du lancé du marteau



Page de commentaire de la page précédente

Cette notion de centre de masse partagé par les deux orbiteurs qui se font face, voyons comment la troisième loi de Kepler dérive de la loi de gravitation mais oublions là pour l'instant.

Analysons plutôt ce qui se passe avec des expériences très basiques que nous avons tous fait, comme de faire tourner autour de nous un objet pesant au bout d'une ficelle.

La trajectoire du marteau décrit un cercle

qui ressemble à la trajectoire d'une planète autour du Soleil et la tension de la corde qui le retient est aussi similaire à la force de gravitation

Calcul du périmètre du cercle

Comme vous le savez tous, le périmètre du cercle se calcul en multipliant son diamètre

D par π

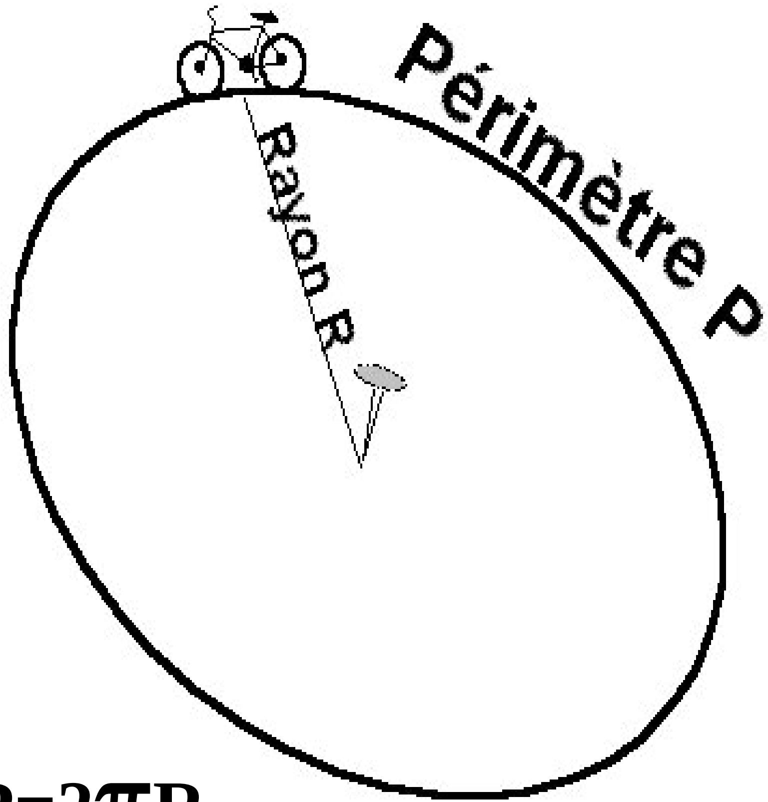
Périmètre $\mathbf{P = \pi D = \pi 2R}$

le plus souvent écrit $\mathbf{2\pi R}$

Page de commentaire de la page précédente

L’analyse de cette expérience nous conduit à de simples constatations et à des équations du même ordre.

Vitesse angulaire et Vitesse curviligne Vitesse curviligne, ou linéaire, est ce qui est généralement sous-entendu lorsque l'on parle de vitesse



P=2πR

La vitesse (linéaire) du cycliste faisant 1 tour de piste s'obtient en divisant le périmètre par le temps mis à le parcourir :

V = 2πR / t, il s'agit de sa vitesse **curviligne**

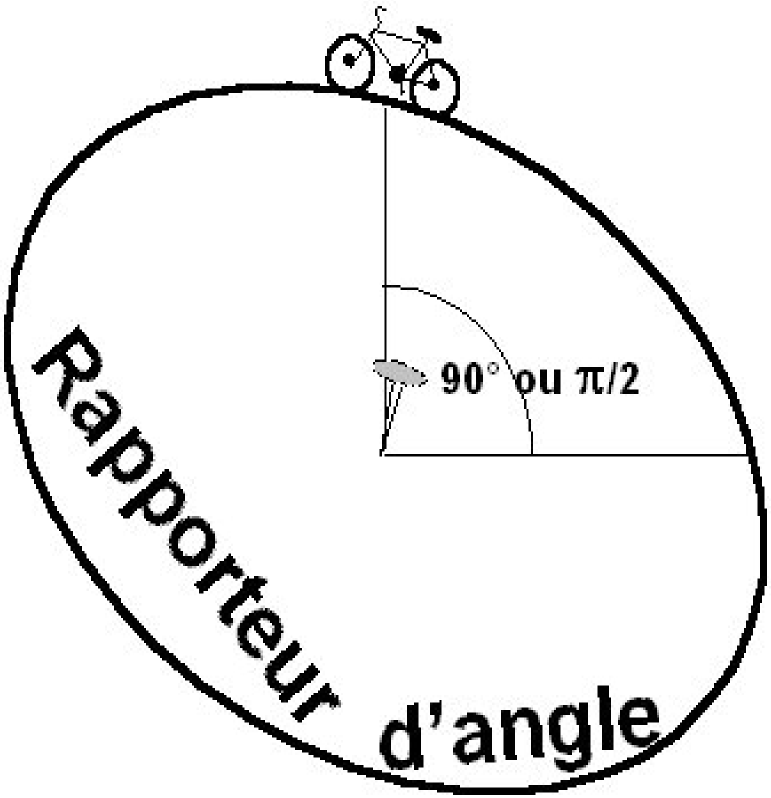
Page de commentaire de la page précédente

En abordant l’aspect de la vitesse de notre objet tenu en laisse deux conceptions de la vitesse apparaissent.

- 1- La vitesse linéaire ou curviligne qui porte sur la distance parcouru dans un temps donné
- 2- La vitesse angulaire qui porte sur la fraction de cercle parcourue dans ce temps donné.

La vitesse angulaire

Si l'on considère un rayon de 1 unité on peut l'omettre dans la formule de calcul du périmètre, alors **P = 2π.**



Mais le périmètre pourrait aussi être gradué comme un rapporteur d'angle et s'exprimer en degrés ou dans une autre unité comme le radian.

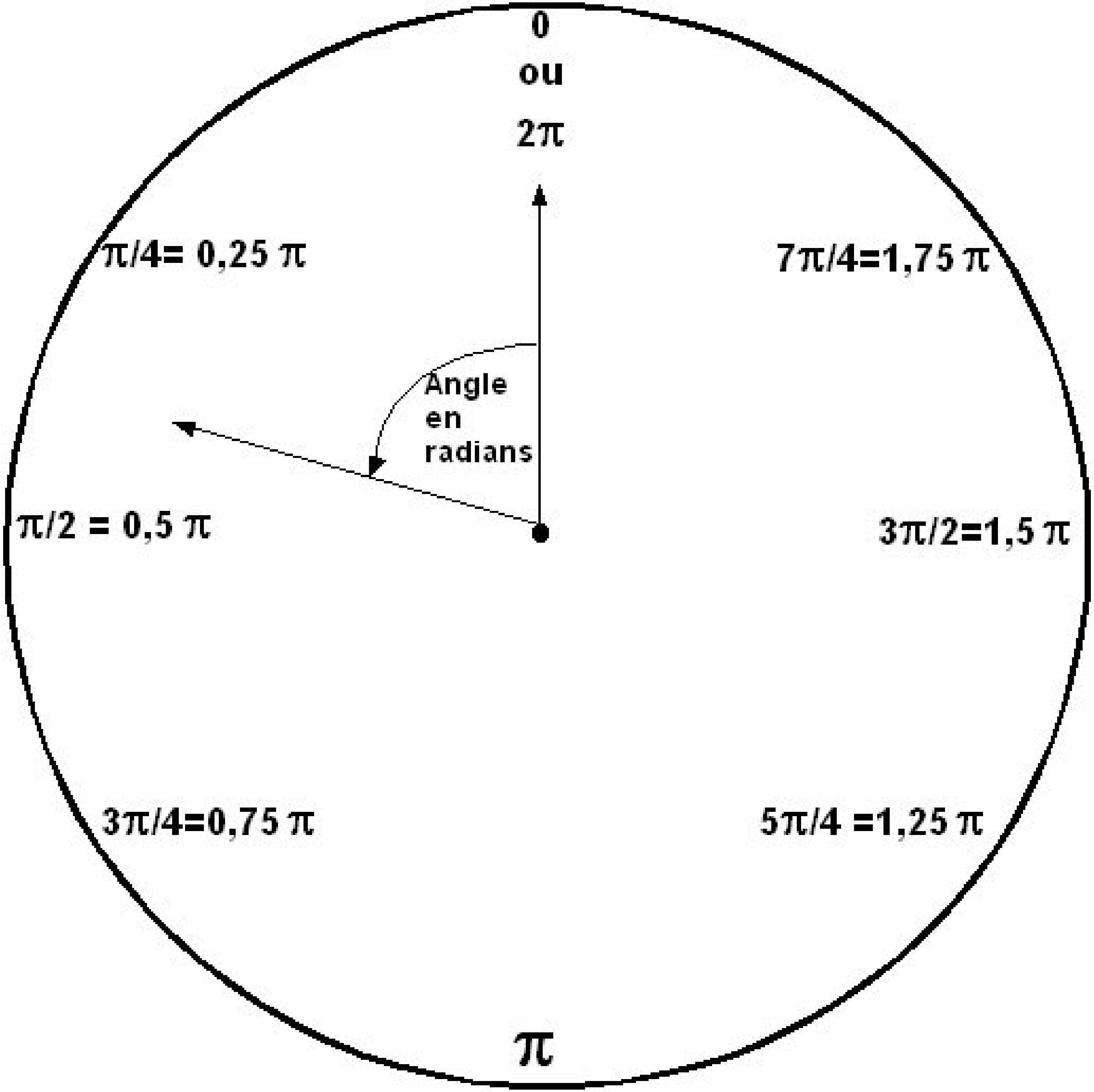
2π radians représentent un tour complet et correspond à un angle de 360°.On peut donc calculer une vitesse angulaire comme une vitesse curviligne sans tenir compte du rayon du cercle :

$$V_{ang} = 2\pi / t = \omega$$

Page de commentaire de la page précédente

La vitesse linéaire ne pose jamais de problème de compréhension et porte sur des parcours aussi bien en ligne droite que courbe

Tandis que la vitesse angulaire ne porte que sur des courbes, fermées en général, et que l’on désigne le plus souvent par un nombre de tours par unité de temps (minutes ou secondes le plus souvent). Un symbole grec spécial lui est consacré.



Une rotation ou un cercle notée en radians

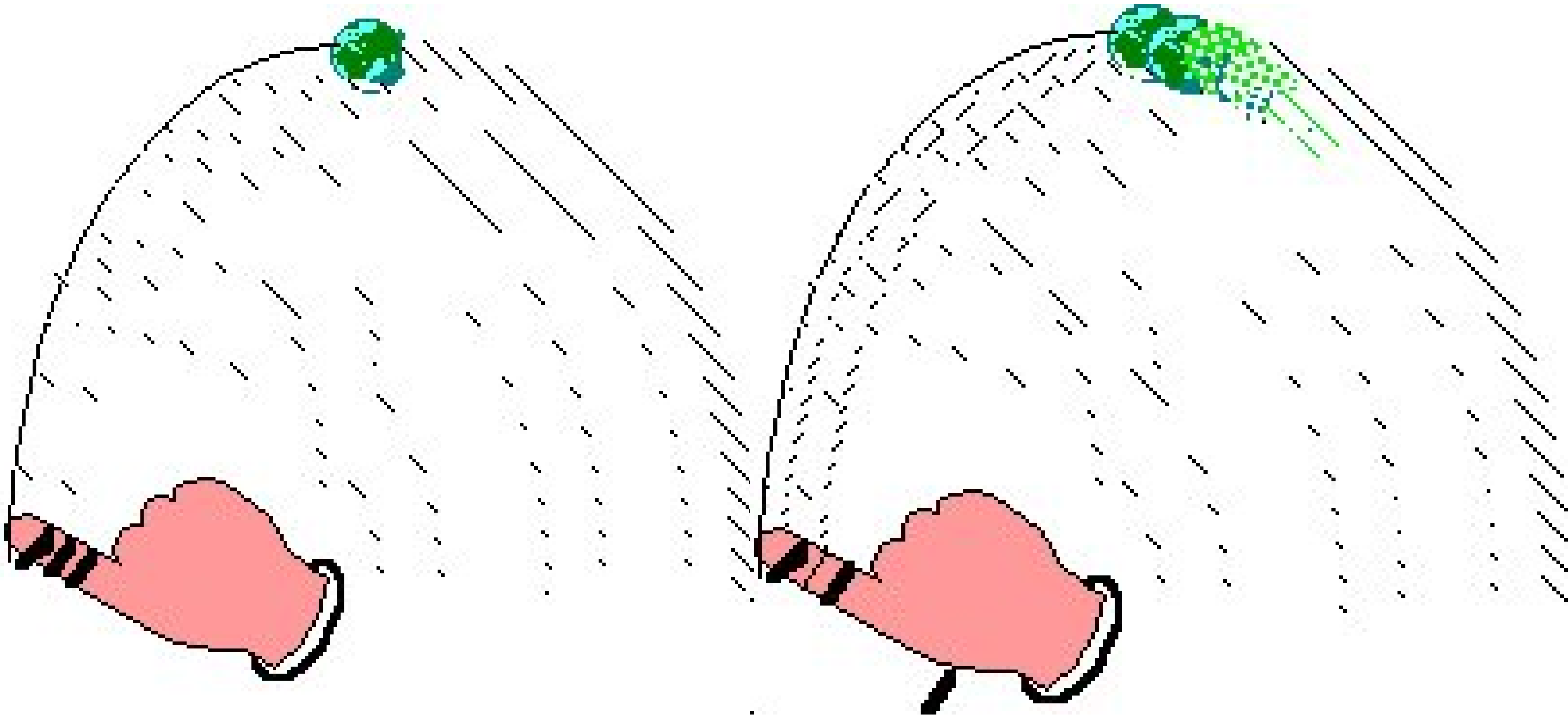
Mais revenons à la vitesse

Page de commentaire de la page précédente

La vitesse angulaire peut se mesurer en degrés par unité de temps ou en grades par unité de temps ou, le plus souvent en radians par unité de temps.

Le radian n'est jamais que la valeur de fraction du périmètre de cercle couvert par unité de temps en considérant que le périmètre égal 2 pi (environ 6,28) pour un cercle idéal dont le rayon vaut 1 unité.

Incidence de la vitesse imprimée au marteau

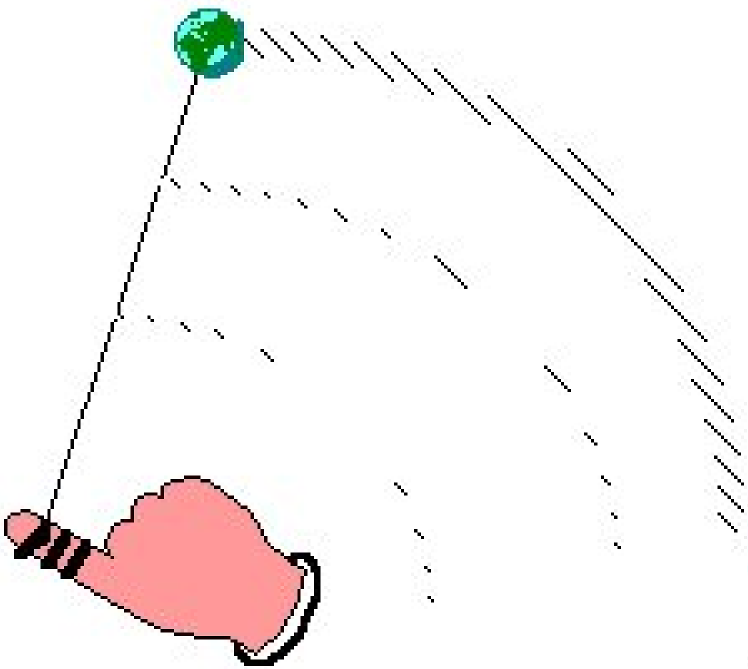


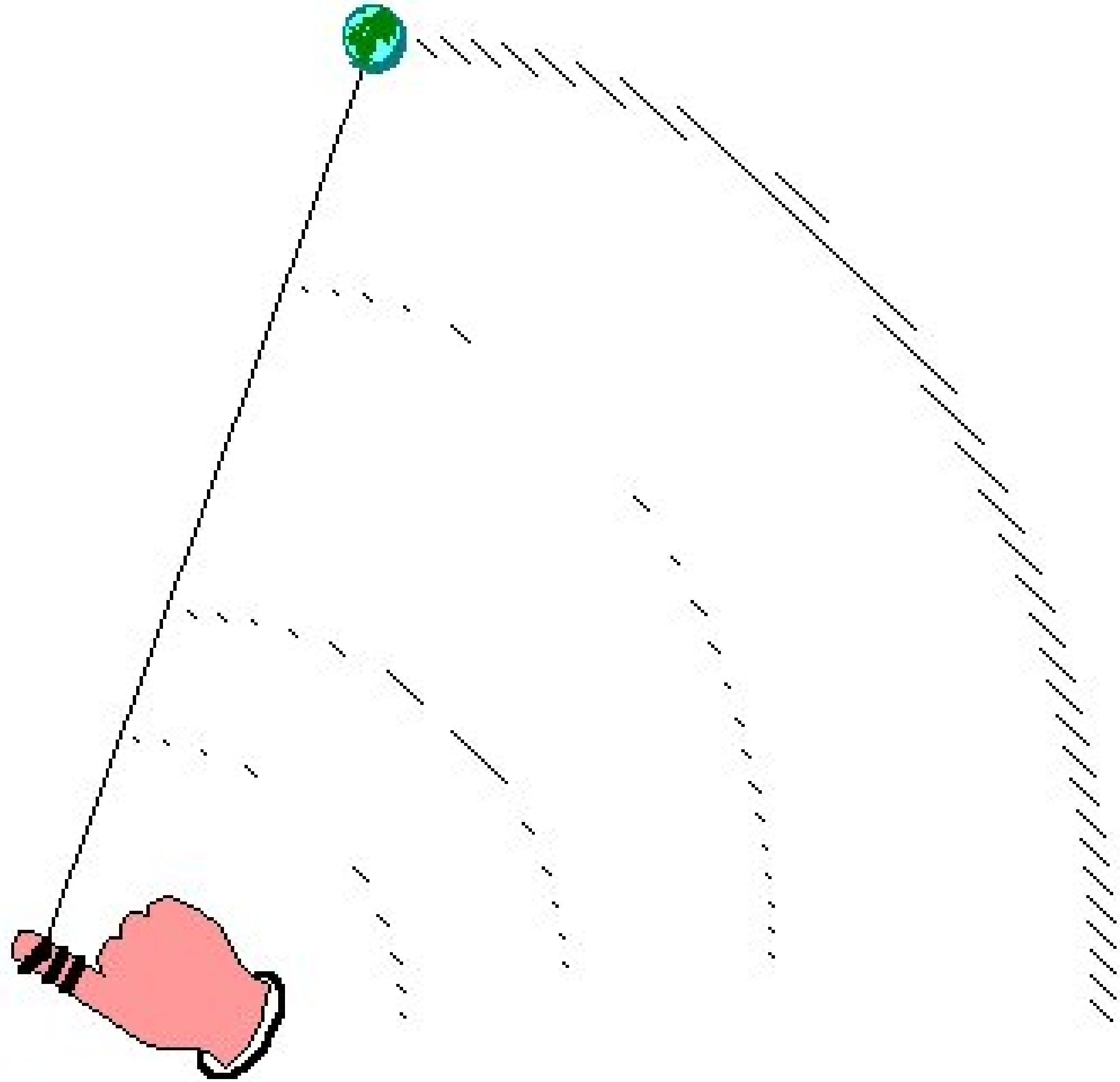
Avec la même masse au bout de la corde et une corde de même longueur, si tous faisons tourner l'ensemble plus vite, que ressentons nous dans le poignet ?

Page de commentaire de la page précédente

Revenons sur nos expériences consistant à faire tourner un objet au bout d’une ficelle et faisons varier la vitesse de rotation tout en estimant ce qui change dans la sensation que nous avons dans le poignet en fonction de ces variations de vitesses.

Incidence de la longueur de la corde



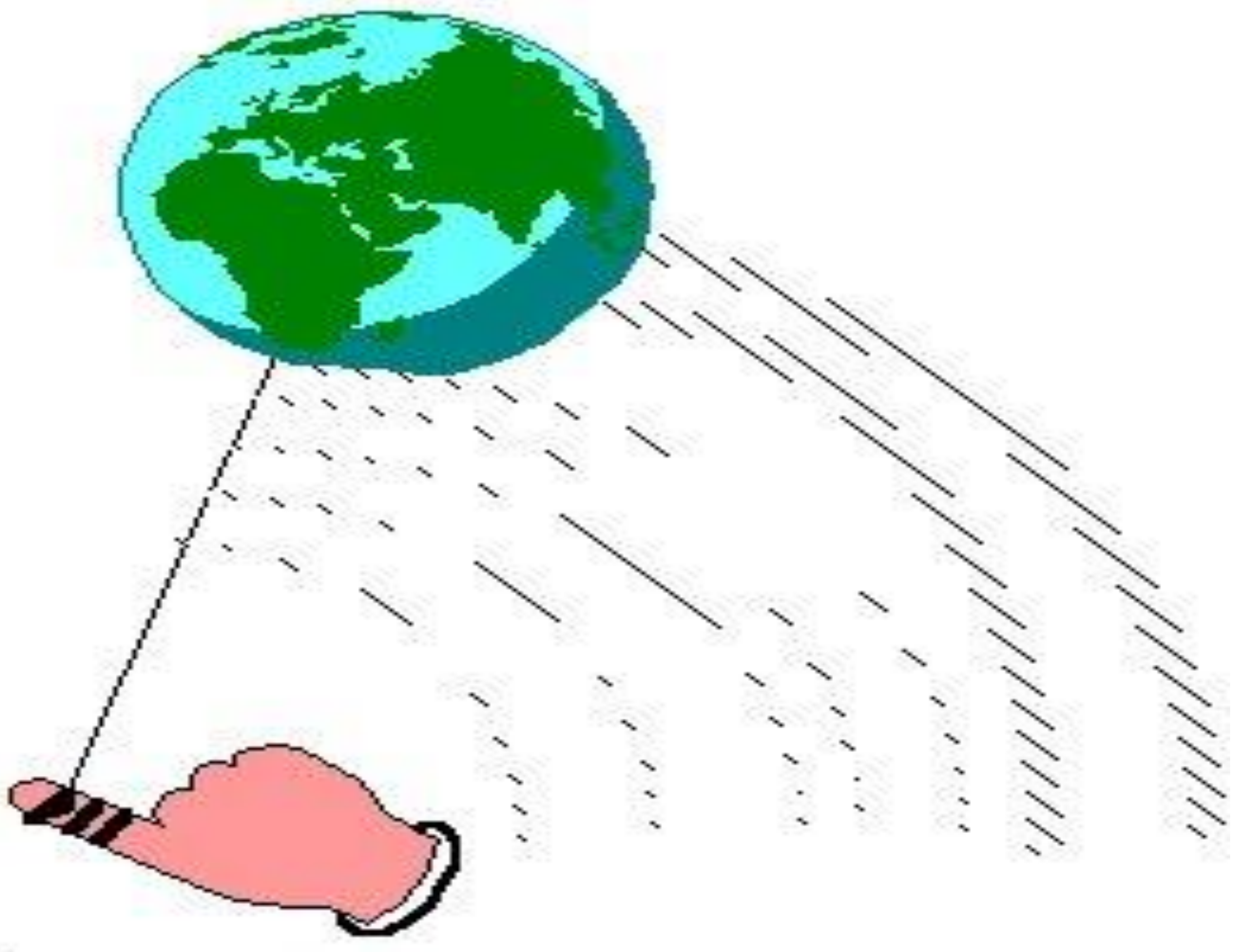


Avec la même masse au bout de la corde et en tournant à la même vitesse si la corde est plus longue que ressentons nous dans le poignet ?

Page de commentaire de la page précédente

Pour l’expérience suivante nous gardons la même vitesse de rotation mais nous changeons la longueur de la ficelle et notons également la sensation que nous avons dans le poignet à la faveur de ces variations de longueur de ficelle.

Avec la même longueur de corde en tournant à la même vitesse mais avec une masse plus importante



que ressentons nous dans le poignet ?

Page de commentaire de la page précédente

Enfin, faisons maintenant varier la masse de l’objet qui est au bout de la ficelle et notons encore la sensation que nous avons dans le poignet en fonction de la masse qui est au bout de la ficelle.

La tension (la force) que nous ressentons dans le poignet dépend

1) De la vitesse de rotation

2) De la longueur de la corde

3) De la masse entraînée par la corde

Ces trois critères entrent dans la formulation mathématique de la page suivante qui traduit en « force » le ressenti physique que nous avions dans le poignet lors des expériences réalisées sur les pages précédentes

Page de commentaire de la page précédente

Nous avons pu constater de façon indépendante pour chacun des critères leur influence propre dans la réaction que nous ressentions à ce mouvement circulaire.

Considérons le mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est une trajectoire qui conduit la Terre à accomplir la totalité de son orbite à la vitesse angulaire ω de

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{\mathrm{t}}$$

Comme toutes les planètes, la Terre subit une accélération α correspondant au produit du carré de sa vitesse ω par le rayon *r* de son orbite conduisant à l'expression : $\alpha = \omega^2 r$

Nous développons la formulation en utilisant les grandeurs connues de la relation (2π, *r*, et *t*) pour obtenir :

$$\alpha = \frac{4\,\pi^2\, r}{\mathrm{t}^2}$$

Le produit de l'accélération α par la masse m*T* de la terre conduit à la force F

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{m}_T\, 4\,\pi^2 r}{t^2}$$

Page de commentaire de la page précédente

Il ne reste plus qu’à mettre tout cela dans une équation en faisant entrer ces trois paramètres de sorte que la force combinée des trois ingrédients qui la produisent soient le modèle mathématique de la force F ressentie dans le poignet. Puisque c’est la force qui est ressentie lorsque l’on fait tourner un objet pesant autour de notre poignet, le Soleil doit *ressentir* la même chose avec les objets pesants que sont les planètes qu’il fait tourner autour de lui puisque l’expérience se présente de la même façon. La ficelle qui retient l’objet n’est que l’attraction qui retient la planète. Supprimez l’attraction et la planète file en ligne droite dans le cosmos comme l’objet le ferait dans l’espace voisin si je coupe la ficelle.

Mais cette force F = $\dfrac{m_T \, 4\pi^2 r}{t^2}$ qui maintient la Terre sur son orbite

est la même que celle de la loi de gravitation **F** $= \dfrac{G * m_T * m_S}{r^2}$

Alors $$\frac{m_T \, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

A partir de cette relation nous avons de nombreuses possibilités.

Page de commentaire de la page précédente

J’ai donc bien une identité entre ces deux situations, celle décrite par la petite équation construite à partir de mes trois expériences et celle décrite par la loi de gravitation de Newton.

Identité de situation signifie égalité des équations.

A partie de cette relation je peux laisser vagabonder mon imagination d’algébriste sans me préoccupé de ce que cela signifie sur la plan de la physique. C’est-à-dire que je peux m’amuser à isoler n’importe quel terme contenu dans l’un ou l’autre membre de l’équation et voir ce que cela donne pour chacun d’eux !

Par exemple nous pouvons calculer la masse du Soleil à partir des éléments orbitaux de la Terre

$$\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

en divisant les deux membres par G m_T et en les multipliant par r^2 nous obtenons l'équation donnant la masse solaire :

$$\frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2} = m_S = \frac{4\pi^2(1{,}5*10^{11})^3}{(6{,}67*10^{-11})31557600^2} = 2*10^{30}\,kg$$

A partir de cette même relation nous pouvons aussi calculer certains éléments orbitaux de la planète située à la distance *r* du Soleil en transformant la relation pour aboutir à la troisième loi de Kepler expliquée dans la première partie de l'exposé sur la Mécanique Céleste

Page de commentaire de la page précédente

Si je considère l'application de cette relation sur le lien qui existe entre une planète et le Soleil je regarde qui sont les acteurs dans la relation.

Mais avant de toucher à quoi que ce soit je remarque que certains termes sont des constantes, universelles ou locales et que d'autres sont des variables. Par exemple, pi et G sont des constantes universelles tandis que Ms n'est une constante que pour le système solaire. Mt et r sont liés et dépendent de la planète considérée, et dans l'exemple chiffré il s'agit de la Terre.

En choisissant d'isoler Ms d'un côté de l'égalité et tous les autres paramètres qui ne s'annulent pas mutuellement deux à deux de l'autre côté nous déterminons la masse solaire

$$\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

Divisons les deux membres de cette équation par $r\ m_T\ \ m_S\ G$ et multiplions les par t^2

$$\frac{4\pi^2}{G m_S} = \frac{t^2}{r^3}$$

Avec les unités du système Internationale, nous avons *t* en secondes et *r* en mètres. Mais si nous choisissons des unités telles que le quotient de chaque membre soit égal à 1 avec par exemple le temps orbital en années et le rayon de l'orbite en UA (Unité Astronomique) nous universalisons la relation en la rendant indépendante des constantes de normalisation de la relation :

$$\frac{t^2}{r^3} = \frac{1^2}{1^3} = 1$$ **ce qui conduit à la relation $t^2 = r^3$**

Page de commentaire de la page précédente

Toujours à partir de la relation d'égalité du haut de la page précédente en choisissant de mettre du même côté de l'équation tous les termes constant pour le système solaire et les constantes universelles, nous retrouvons notre troisième loi de Kepler qui nous a servi à déterminer les distances planétaires.

Nous retrouvons la constante K qui est ici un mélange de toutes les constantes (4, pi, G, et la masse ms du Soleil) et qui correspond à des temps orbitaux exprimés en secondes et non plus en années, et à des distances exprimées en mètres et plus en UA.

La relation t2 = r3 permet ainsi de déterminer le temps orbital d’un corps en orbite si l’on connaît la distance qui le sépare du barycentre autour duquel il tourne, ou encore réciproquement, cette distance si l’on connaît la période orbitale

Comme il est dit sur la diapo précédente, en choisissant des unités relatives à la position et au temps orbital de la Terre nous simplifions considérablement les calculs tout en nous donnant des grandeurs significatives pour les terriens que nous sommes.

Page de commentaire de la page précédente

En transformant ce mélange de constantes et en lui imposant la valeur 1 comme nous l’avions fait dans le premier exposé de cette initiation nous imposons du même coup des temps en années terrestres et des distances en UA, c’est-à-dire une unité de longueur correspondant à la distance Terre-Soleil.

Nous choisissons donc la mesure du temps en années terrestres et la mesure des distances en rayons de l'orbite terrestre c'est-à-dire en UA. Pour la Terre nous avons donc bien $1^2 = 1^3$

Page de commentaire de la page précédente

Rappelez vous nous avons déjà fait cela durant le premier exposé. Il ne s’agit que d’une révision.

Pour Jupiter dont la période sidérale est de 11,862 années nous avons l'identité :

$$11{,}862^2 \text{ années} = 5{,}2^3 \text{ UA}$$

Connaissant la période sidérale nous obtenons la distance au Soleil de

$$\sqrt[3]{11{,}862^2} = 5{,}2\,UA$$

Réciproquement, connaissant la distance au Soleil de 5,2 UA nous obtenons la période sidérale :

$$\sqrt[2]{5{,}2^3} = 11{,}86\,années$$

Page de commentaire de la page précédente

Pour ne pas nous en tenir à la Terre et à Mars appliquons la méthode sur les paramètres de Jupiter pour nous convaincre de l’universalité de la méthode

Nous pouvons ainsi déterminer la distance à laquelle n'importe quelle planète se trouve du Soleil par la simple observation de sa période synodique car nous savons en déduire sa période sidérale grâce à celle de la Terre que nous connaissons par l'observation directe à partir de deux passages consécutifs au méridien d'une même étoile. Mais comment pouvons nous estimer la distance qui sépare la terre d'une autre planète sachant que les deux astres changent constamment de position sur leurs orbites respectifs ?

C'est encore du calcul, mais de temps.

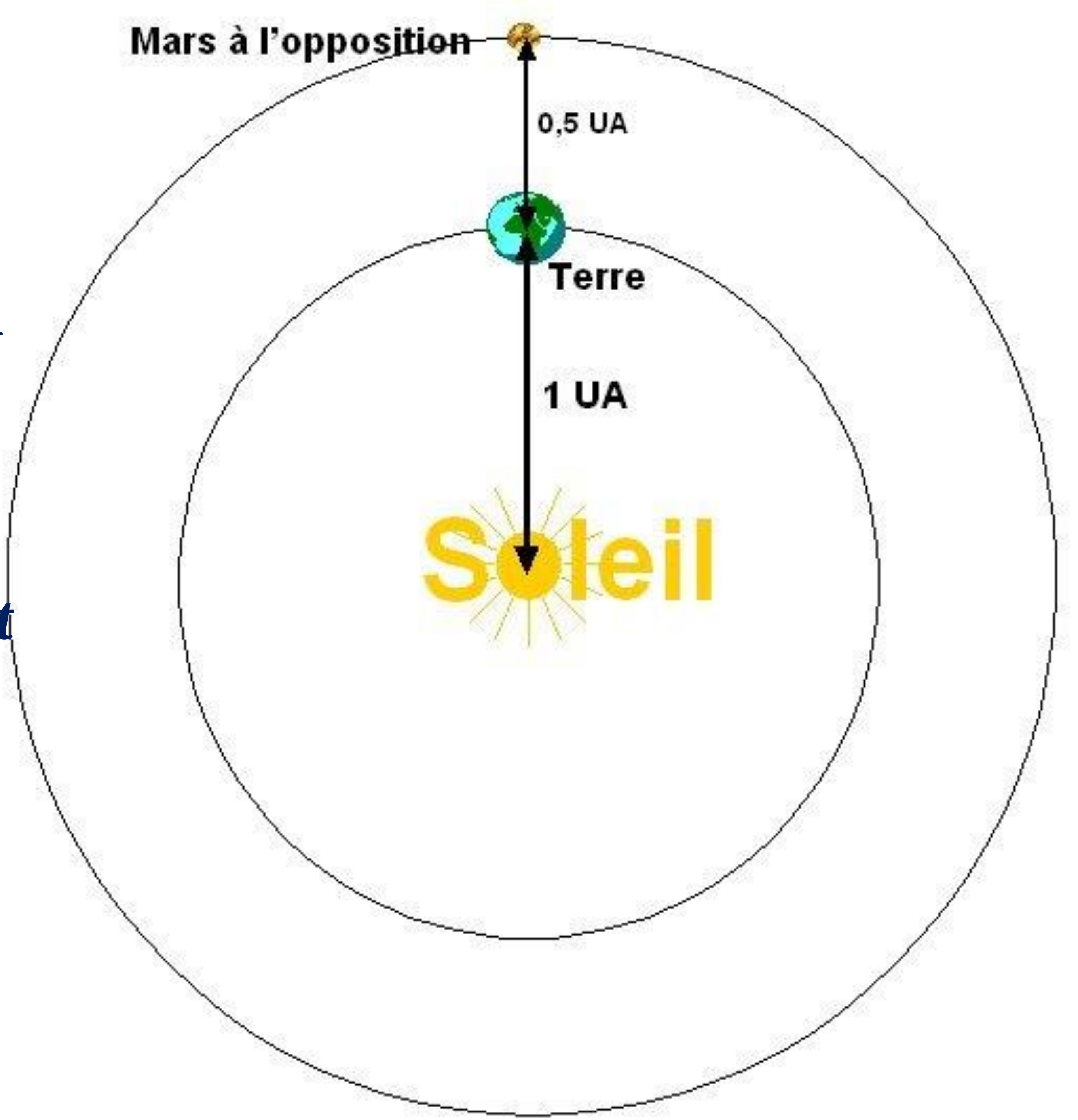
Page de commentaire de la page précédente

Nous avons maintenant une bonne connaissance de la détermination de la distance qui sépare une planète du Soleil, alors allons plus loin.

Déterminons maintenant la distance qui sépare deux planètes l'une de l'autre, par exemple la Terre et Mars et découvrons de nouveaux instruments d'observation astronomique : Le chronomètre et le calendrier qui nous feront transformer le temps en distances.

L’opposition

Une situation particulière dans laquelle la distance séparant deux planètes *(par exemple Terre et Mars)* est égale à la différence de leur éloignement respectif au Soleil

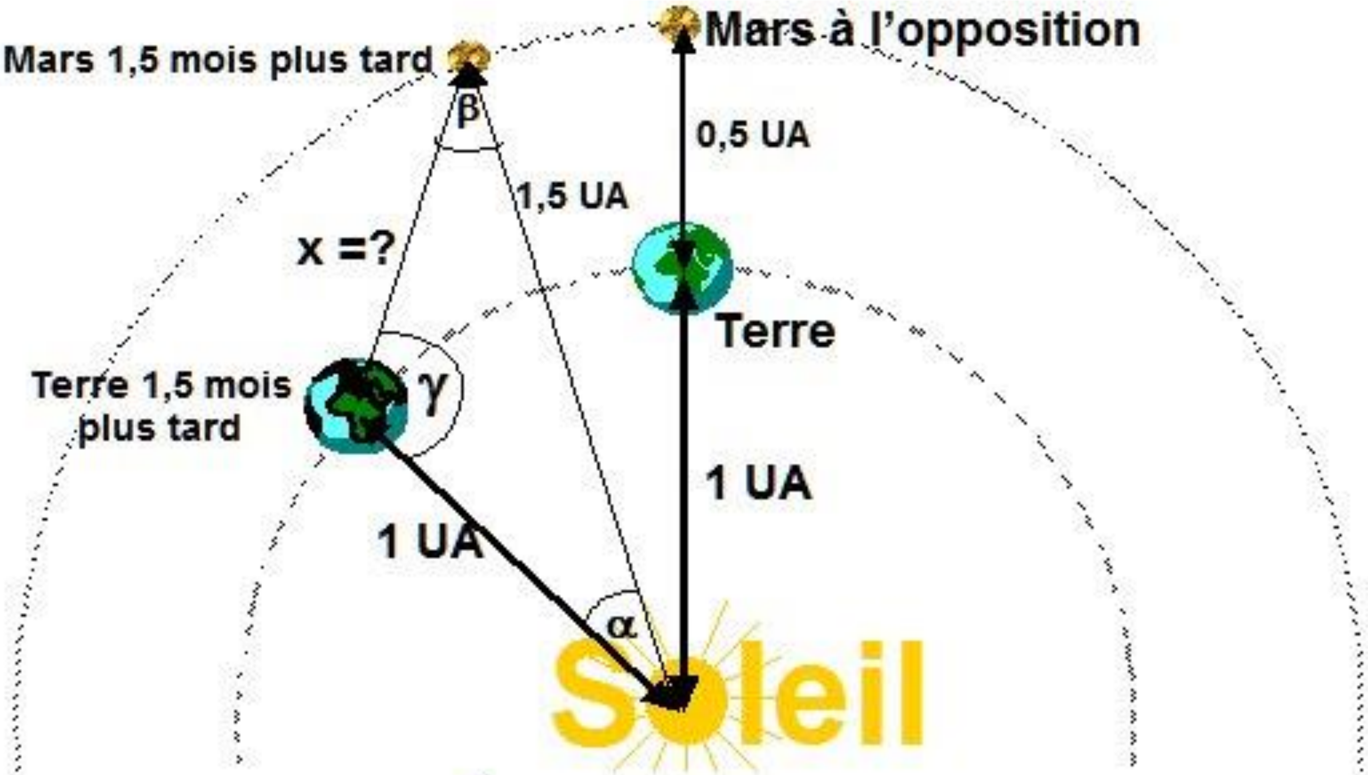


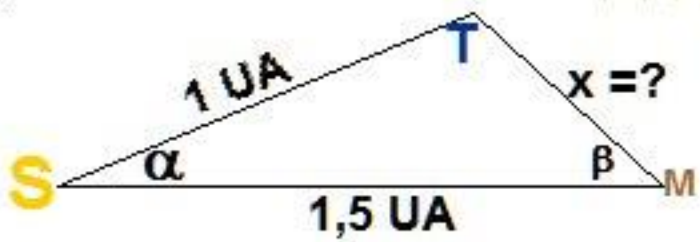
Page de commentaire de la page précédente

Au départ de la course, la Terre et Mars sont sur la même ligne de départ, Mars étant 50% plus loin du Soleil que ne l'est la Terre, et la course commence. Dès le début, la Terre, plus proche du Soleil que Mars, donc plus rapide, prend de l'avance. Plus le temps passe plus cette avance s'accentue.

Connaissant la période orbitale de chacune des deux planètes nous connaissons aussi leur vitesse angulaire ramenée à n'importe quel durée, en année, ou jour ou minute….

Relevons les positions des deux planètes 1 mois et demi plus tard. Nous savons que la Terre met 1 an pour parcourir les 360 degrés de son orbite alors que Mars en met 1,88 de nos années.





C'est le temps écoulé depuis l'opposition qui permet de déterminer par une méthode géométrique la distance qui sépare deux planètes.

En effet, connaissant deux cotés d'un triangle et un de ses angles, on détermine le troisième côté

Exemple de calcul de distance séparant la Terre de Mars

Depuis Kepler nous connaissons la distance relative Soleil-Terre et Soleil-Mars, respectivement 1 et 1,5 UA. Il reste a déterminer l'angle α Pour savoir l'angle α il suffit de soustraire l'angle du chemin parcouru par Mars entre la date de l'opposition et la date à laquelle on désire estimer la distance de Mars de l'angle du chemin parcouru par la Terre durant cette période.

Page de commentaire de la page précédente

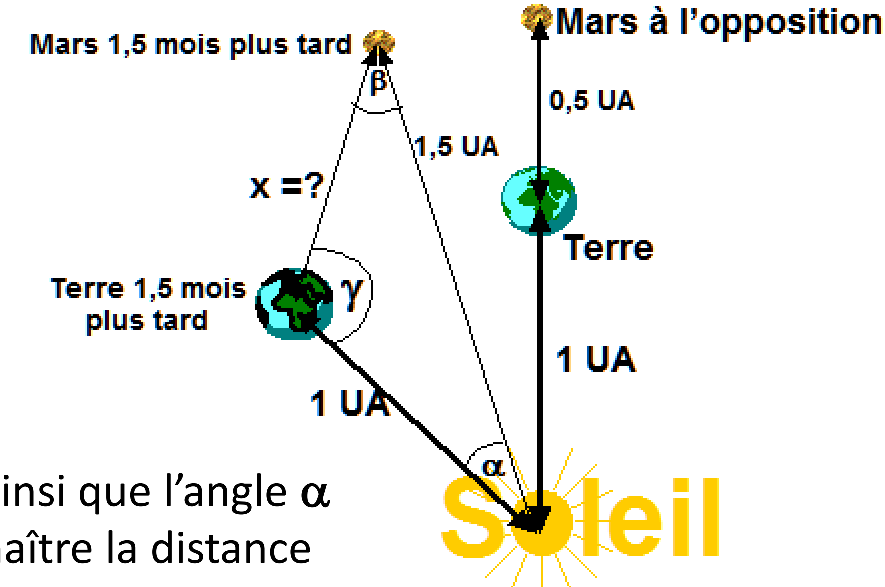
Dans un triangle si nous connaissons 2 des 6 paramètres (angles ou côtés) qui le caractérisent dont au moins une des longueurs des côtés du triangle nous pouvons savoir les 3 angles et les trois côtés. Sans faire aucun calcul nous connaissons déjà les longueurs de deux côtés du triangle qui sont les distances du Soleil à chacune des deux planètes. Et par le calcul nous pouvons obtenir l’angle alpha. Nous sommes donc capables d’obtenir le côté que nous cherchons à connaître, celui qui représente la distance séparant la Terre de Mars.

1,5 mois après le départ les angles que font, d’une part la ligne Soleil-Terre avec la verticale de départ et, d’autre part la ligne Soleil-Mars, sont obtenus par de simple proportions entre le temps écoulé et la fraction d’angle couverte par le déplacement. L’angle alpha n’est lui-même que la différence entre les deux.

La Terre boucle sont orbite en 1 an (12 mois). Au bout d'un mois et demi elle aura donc parcouru un angle de 360°*1,5/12 = 45°

Dans le même temps, Mars qui boucle son orbite en 1,88 années terrestres aura parcouru un angle de 360°*1,5 / (12*1,88) = 23,94°

L'angle α = 45° - 23,94° = 21,06°



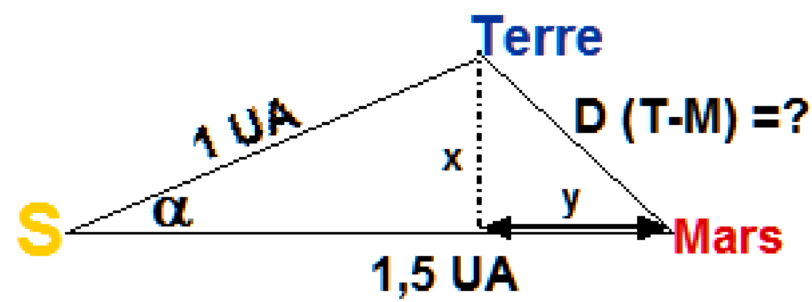
Connaissant la distance Soleil-Terre et Soleil Mars ainsi que l'angle α il ne reste plus qu'à résoudre ce triangle pour connaître la distance séparant la Terre de la planète Mars à ce moment précis, 1,5 mois après l'opposition.

Nous avons :

X= 1(UA) sin α

Y = 1,5 – 1(UA)cos α

Distance Terre-Mars = racine de X² + Y²



Numériquement nous avons donc :

0,359 = Sin α = X   et   0,567 = 1,5 – cos α = Y

$$0{,}67 \text{ UA} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Page de commentaire de la page précédente

Dans la partie haute à gauche de la projection il vous est expliqué comment on obtient l'angle alpha. Le raisonnement suivi est illustré par le schéma des positions occupées par les deux planètes et le Soleil. Vous voyez qu'un calendrier peut aussi servir de rapporteur d'angles.

En dessous et à droite, le triangle Terre-Soleil-Mars est conceptualisé pour illustrer le raisonnement conduisant à la détermination de la distance Terre-Mars, et expliqué à gauche grâce au théorème de Pythagore. Nous savons ainsi que la distance de la Terre à Mars s'accroit avec le temps écoulé depuis l'opposition et qu'il suffit de calculer cette différence de temps pour connaître la distance qui sépare les deux planètes à n'importe quelle date rapportée à celle de l'opposition.

Mettons ces connaissances à profit

Nous savons que la Lune orbite à la distance moyenne de 384000 km de la terre en 27 jours 1/3 et que celle-ci est 81,3 fois moins massive que la Terre

Nous savons aussi qu'un satellite artificiel qui doit rester en permanence dans le plan méridien (on dit qu'il est géostationnaire) d'un lieu géographique terrestre doit orbiter à 36000 km de la surface du sol.

<u>Questions :</u>

Combien de km fait le rayon de la Terre ?

Où se trouve le barycentre Terre-Lune par rapport au sol ?

Quelle est la masse de la Terre ?

Page de commentaire de la page précédente

Faisons une petite récapitulation de nos connaissance en résolvant quelques questions pour lesquelles nous avons les outils de la solution.

Il suffit de savoir les rapporter aux problèmes posés. Bien que nous ayons déjà résolu la principale question relative au problème du satellite géostationnaire, découvrons qu’elle n’était que sous-jacente à des questions connexes que nous devons aussi savoir résoudre.

Réponses aux questions posées

1) Détermination du rayon terrestre

Selon la relation de la troisième loi de Kepler nous savons avec D pour rayon orbital du satellite géostationnaire : $384000^3 / 27{,}3^2 = D^3 / 1^2$

En effectuant l'opération nous avons

$384000^3 / 27{,}3^2 = 75974592440526 = D^3$

Dont la racine cubique donne $D = 42353$

Le satellite orbitant à 36000 km au-dessus de la surface de la terre, le rayon terrestre est donc de 42353 – 36000 = 6353 km

Page de commentaire de la page précédente

Celle-ci est des plus simples et seulement inhabituelle

2) Où se trouve le barycentre Terre-Lune par rapport au sol ?

La distance centre à centre entre la Terre et la Lune de 384000 km. Cette distance divisée par le rapport de masse donne la distance du centre de la terre au centre de masse

384000/81,3 = 4723 km

ce qui le situe à 6353 – 4723 =

1630 km sous la surface du sol.

Page de commentaire de la page précédente

C’est une question que nous avions su résoudre pour le barycentre Soleil-Terre et le principe est le même pour Terre-Lune

3) Quelle est la masse de la Terre ?

En développant l'équation de la gravitation en harmonie avec les lois précédemment connues de la physique et en prenant l'exemple de la terre orbitant autour du Soleil nous avions abouti à la relation : $\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$ **Nous pouvons remplacer le Soleil par la Terre et la Terre par la Lune ce qui nous donne la même situation :** $\frac{m_{Lune}\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_{Lune} * m_T}{r^2}$

En soustrayant m_{Lune} des deux membres, en simplifiant l'équation, et en isolant M_T comme seul terme du membre on constate que tous les termes de l'autre membre sont soit des constantes (G, 4π), soit des termes connus, « r » et « t » (rayon de période orbitale de la Lune)

Page de commentaire de la page précédente

Encore une question que nous avions su résoudre pour déterminer la masse du Soleil à partir des éléments orbitaux de la Terre.

Nous avons à le résoudre ici pour déterminer la masse de la Terre à partir des éléments orbitaux de la Lune.

Ainsi la relation $\frac{m_{Lune}\,4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_{\mathrm{Lune}} * m_T}{r^2}$ **devient-elle :**

$$\frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2} = \mathrm{m}_{\mathrm{T}}$$

Et numériquement nous avons :

$$M_{\mathrm{T}} = \frac{4\pi^2 (384*10^6)^3}{(6{,}67*10^{-11})2358720^2} = 6*10^{24} kg$$

La Terre «pèse» donc $6*10^{24}$ kilogrammes

Page de commentaire de la page précédente

Chaque objet qui partage un centre de masse commun avec un autre peut ainsi être « pesé » grâce à l’analyse des paramètres orbitaux de l’autre.

Une question complémentaire pour les matheux

Démontrez qu'une planète quelconque du système solaire, éloignée d'une distance moyenne *d* (exprimée en UA) du Soleil, orbite à une vitesse linéaire égale à *V* (exprimée dans les unités de votre choix, km/s, km/h, m/s…) selon l'équation ci-dessous

$$\frac{Vitesse\ Terre}{\sqrt[2]{d_{planète}(en\ UA)}} = V_{planète}\ (*)$$

(*) vitesse obtenue dans les mêmes unités qu'au numérateur, km ou m par seconde, par exemple.

Page de commentaire de la page précédente

Ici la démonstration est plus subtile car il semble surprenant que la vitesse orbitale d’une planète puisse dépendre de celle de la Terre.

Mais c’est oublié qu’elles sont toutes soumises aux même lois, notamment que leur vitesse dépend de leur distance au Soleil

REPONSE

Chaque planète du système solaire subit une accélération identique imposée par la masse du Soleil. Cette accélération est égale au produit du carré de la vitesse de la planète dans sa trajectoire orbitale par le rayon de son orbite et s'exprime par la relation suivante, avec R pour rayon de l'orbite, Vp pour la vitesse d'une quelconque des planètes, et Vt pour la vitesse de la Terre :

$R(Vp)^2 = \alpha$ et si nous choisissons l'UA comme unité de distance nous avons aussi **$\alpha = 1(Vt)^2$**

$R(Vp)^2 = \alpha = (Vt)^2$ en extrayant la racine des deux membres de l'équation nous avons : $(Vp)\sqrt{R} = Vt$ et en divisant par $\sqrt{R}$

$$Vp = \frac{Vt}{\sqrt{R}} = \frac{Vitesse\ Terre}{\sqrt[2]{d_{planète}(en\,UA)}} = V_{planète}$$

CQFD

Page de commentaire de la page précédente

Un nombre d’UA doit être compris comme étant un nombre de fois la distance Soleil-Terre et non comme la distance elle-même

Merci de votre aimable attention

Y a-t-il des questions ?

Page de commentaire de la page précédente

Une autre série de quatre exposés intitulé « La gravitation » reprend ces différents aspects en les développant un peu plus et en incluant d'autres expériences, comme la détermination de l'accélération terrestre de deux façons différentes, depuis une expérience terrestre et une expérience astronomique, et avec pour aboutissement la détermination des masses individuelles des étoiles doubles.