Document ANAP

Serge Rochain

INITIATION À LA MÉCANIQUE CÉLESTE

(PREMIÈRE PARTIE)

LE GÉNIE DE KEPLER

ANAP

Commentaire sur la diapo précédente

C’est une présentation que j’avais faite en 2013 mais depuis il y a de nouvelles têtes.

Ce thème d’initiation à la mécanique céleste fait l’objet de deux exposés.

Ce premier exposé traite de la façon dont se comportent mutuellement les corps en orbites et développe les notions d’orbites sidérales et synodiques.

Enfin une analyse de la troisième loi de Kepler nous fait découvrir ce que l’on peut en attendre.

1) Le ciel et tout ce qu'il contient tourne autour de la Terre ? **NON!**

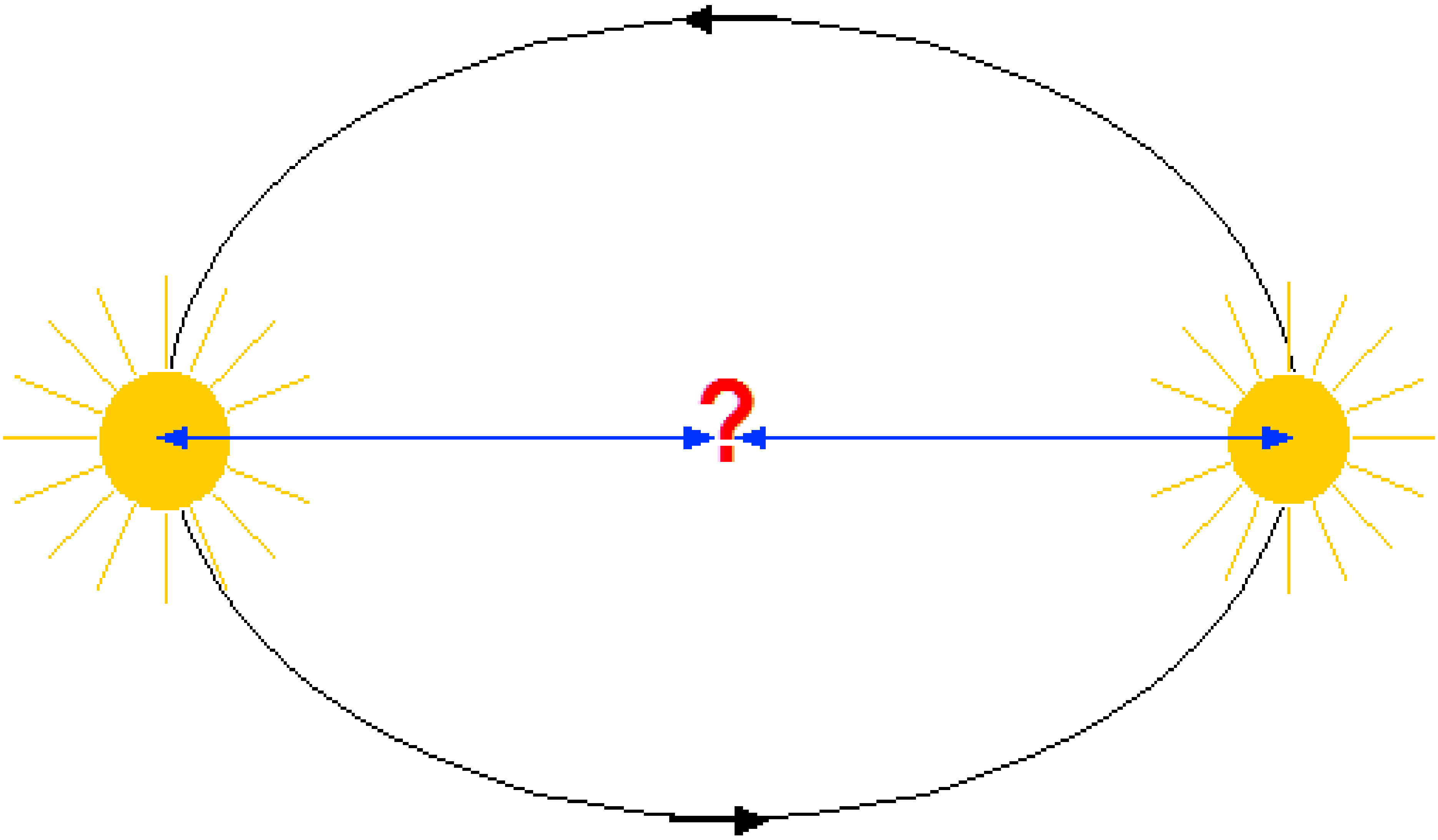
2) La Terre tourne autour du Soleil ?

Non, pas vraiment, pourquoi ?

Commentaire sur la diapo précédente

- Non, la Terre ne tourne pas autour du Soleil, pas exactement.

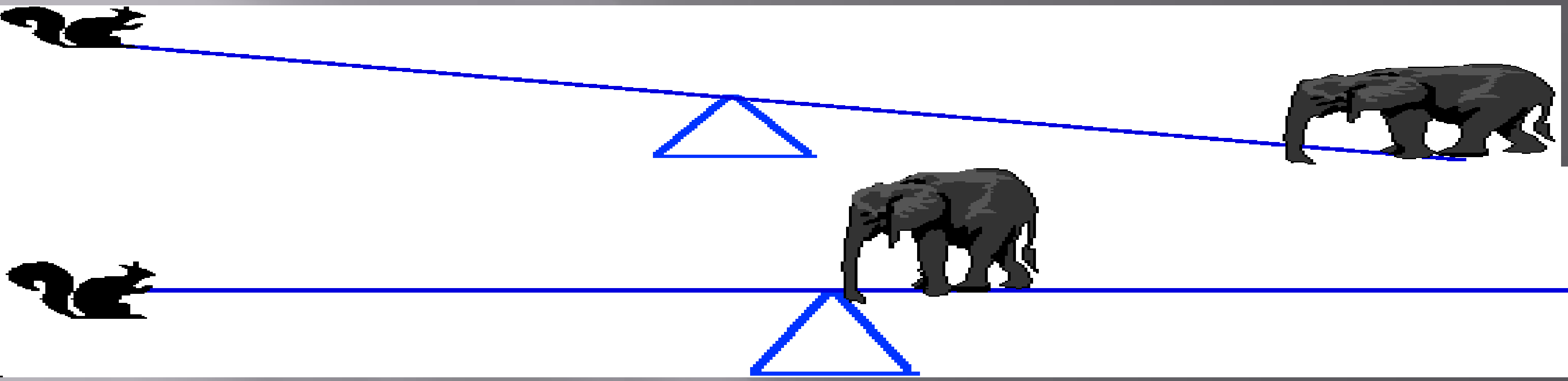
Imaginons deux Soleils identiques en orbite l'un autour de l'autre

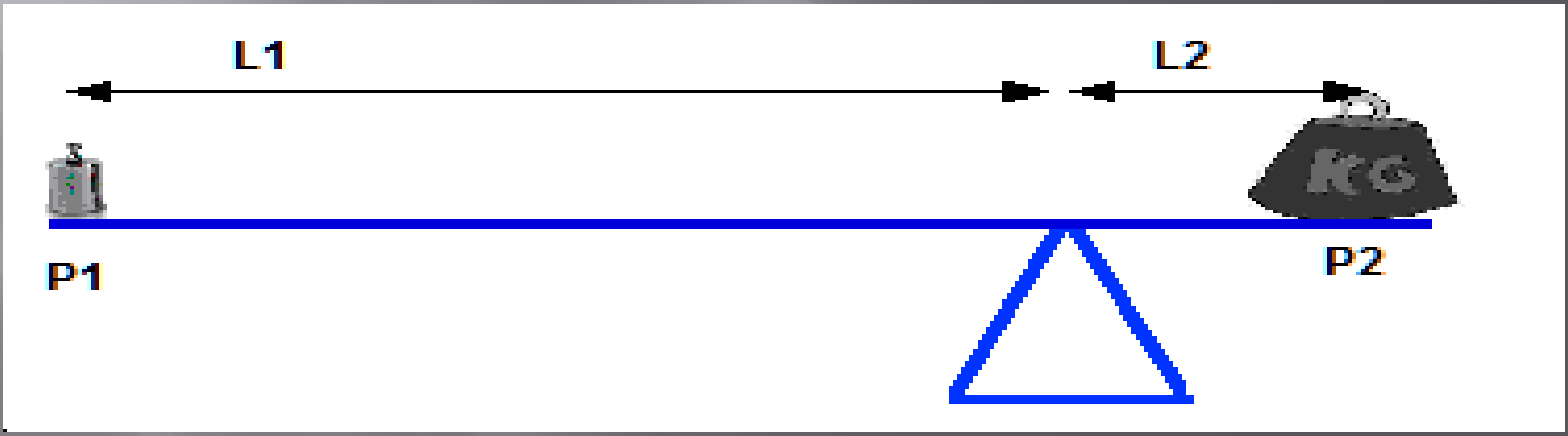


Commentaire sur la diapo précédente

- Mais que se passerait il si de ces deux Soleil l'un était plus massif que l'autre ?
- Et même beaucoup plus massif ? Ce qui est le cas du Soleil et des planètes.

Analogie





L’égalité : P1.L1 = P2.L2

Commentaire sur la diapo précédente

Entre le Soleil et ses planètes, il existe une constante liant les rapports de masses et leur distances respectives au barycentre qu'ils forment par couples Soleil-planète.

P1/L1 = P2/L2   Et ce n'est pas la seule constante liant ces corps en orbite comme nous allons le voir.

Calcul : distance Terre-Soleil = 150 millions de km
Rayon solaire 698 000 km et masse de 333000 fois la Terre

Question : A quelle distance sous la surface du Soleil se trouve le centre de masse du système Terre-Soleil ?

Commentaire sur la diapo précédente

C'est une question à laquelle vous devez maintenant savoir répondre…. Mais voyons tout de même la solution de ce problème.

Le barycentre Soleil-Terre est donc à

150millions de Km divisé par 333 001
= 450,45 km du centre du Soleil

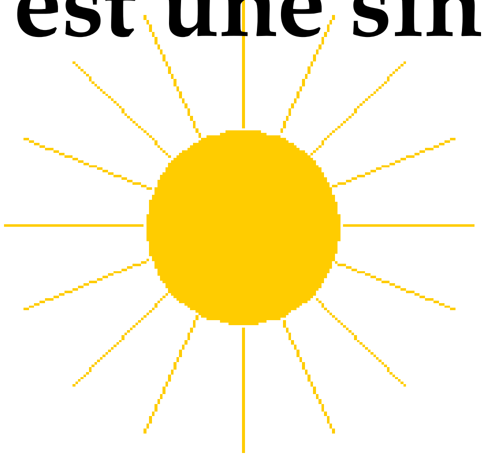
soit 697550 km sous la photosphère.

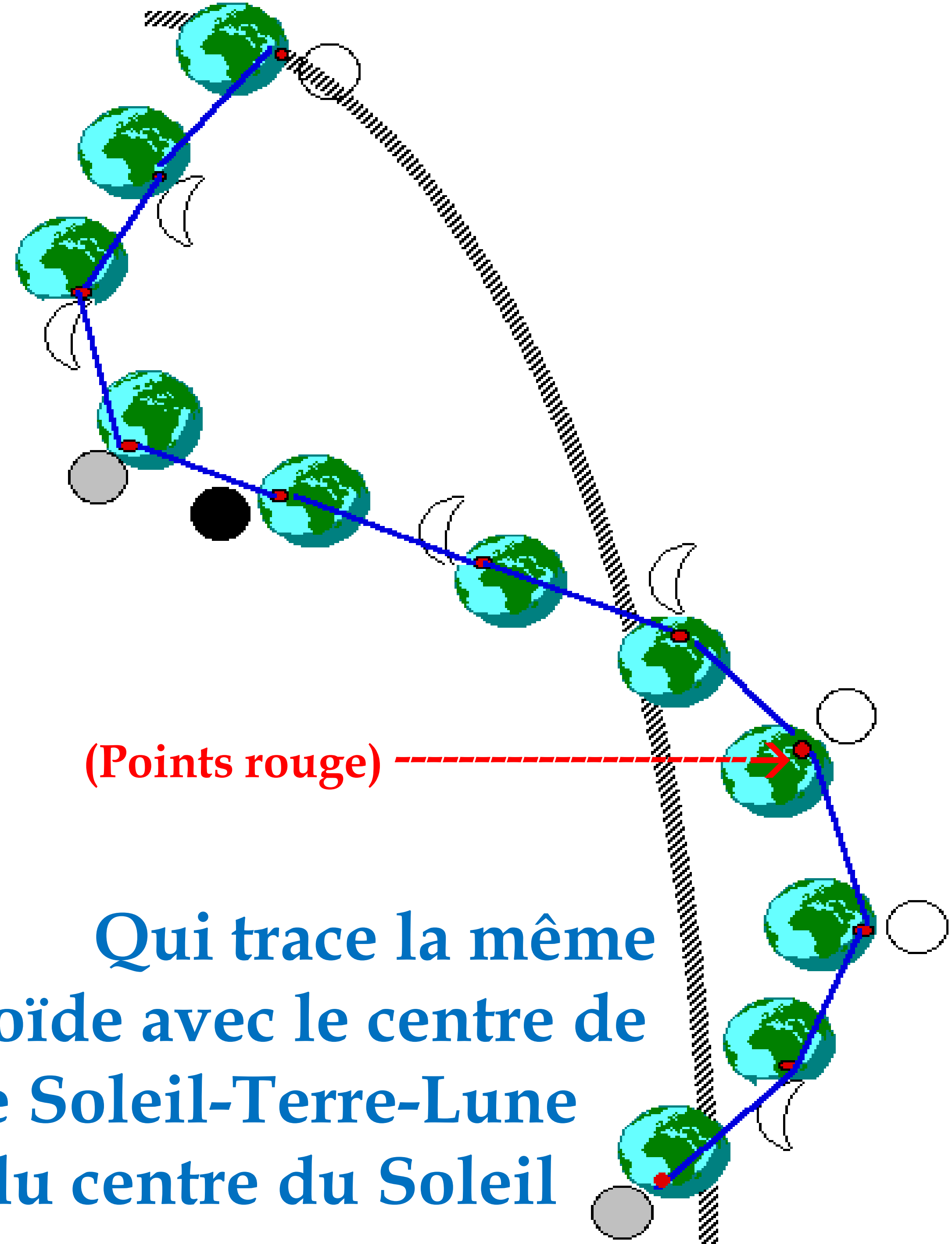
450,45 km*333 000 Mt (soit 1masse solaire)
=
149 999 550 Km * 1Mt

Commentaire sur la diapo précédente

- Dire que l’on tourne autour du Soleil est donc une erreur négligeable. Mais un observateur de très loin dans l’espace verrait le Soleil osciller un peu à cause de la Terre et beaucoup plus à cause de Jupiter, ou Saturne…. L’ensemble des planètes produit une oscillation complexe du Soleil résultat de l’influence de chacune d’elles. C’est ainsi que l’on a découvert la plupart des planètes extrasolaires. Et les oscillations complexes dues à des systèmes stellaires de plusieurs planètes doivent être décomposés en séries de fourrier pour déterminer leur nombre et leurs masses relatives .
- Mais revenons dans les mouvements complexes.

Ce n'est pas la Terre qui tourne autour du Soleil, mais le couple Terre Lune et la trajectoire de son centre de masse est une sinusoïde





Qui trace la même sinusoïde avec le centre de masse Soleil-Terre-Lune près du centre du Soleil

Commentaire sur la diapo précédente

- Ce que nous venons de dire pour Soleil-Terre s'applique également à Terre-Lune et à l'ensemble (Terre-Lune) vis-à-vis du Soleil.
- Ainsi la marche de la Terre autour du Soleil n'est pas cette courbe régulière dessinée en pointillés, mais une sinusoïde (très exagérée ici) car la courbe régulière n'est que la moyenne du barycentre Terre-Lune qui est elle-même une sinusoïde un peu plus aplatie que celle tracée par la trajectoire de la Terre qui est elle-même plus aplatie que celle tracée par la trajectoire de la Lune.

Passons au calcul

Kepler qui n'en a pas compris la raison a constaté que pour des corps en orbite de masses négligeables en regard de la masse de celui autour duquel ils orbitent, il existe le rapport :

$$R^3/T^2 = K$$

Commentaire sur la diapo précédente

- Ce qui veut dire que pour toutes les planètes en orbite autour du Soleil le rapport entre leur distance au Soleil porté au cube et leur période orbitale portée au carré est une constante.
- Plus une planète est éloignée du Soleil, moins elle est rapide.

Toutes les planètes ont une masse négligeable comparée à celle du Soleil

De même la Lune comme tous les satellites que nous envoyons en orbite ont une masse négligeable en regard de celle de la Terre

Commentaire sur la diapo précédente

- Le rapport $R^3/T^2 = K$ s'applique à tous les corps en orbite :
- Les planètes par rapport au Soleil, mais aussi les satellites de ces planètes par rapport à leurs planètes

$R^3/T^2 = K$ signifie que ce rapport R^3/T^2 est une constante pour tous les objets dans un système où ces objets orbitent autour d'une masse importante

Mais combien vaut cette constante K ?

Et bien, pour un système donné, cela ne dépend que des unités choisies !

Commentaire sur la diapo précédente

- On peut choisir de mesurer les distances en km et les masses en Kg ou tout autres systèmes, cela ne change rien au problème. Il suffit d'appliquer les mêmes unités pour toutes les planètes pour constater que le K qui en résultera sera le même.
- Nous pouvons même imposer que K soit égal à 1. Il suffira de choisir les unités qui le permettent pour R et T et nous n'allons pas nous en priver.

Nous pouvons choisir les unités pour que K soit toujours égal à 1

Donc décidons que $R^3/T^2 = 1$

Puisque cette constante est valable pour toutes les planètes elle l'est donc pour la Terre. La période orbitale de la Terre est de 1 an donc

$R^3/1^2 = 1$

R ne peut donc qu'être égal à 1

Donc $1^3/1^2 = 1$

Mais quelle est cette unité qui assigne la valeur 1 à R ?

Commentaire sur la diapo précédente

- Comment appelle-t-on cette distance égale à 1 entre la Terre et le Soleil ?

C’est l’unité qui mesure la distance Terre-Soleil et qui n’est donc ici ni le mètre ni le km ni n’importe quelle autre unité de mesure de distance usuelle, c’est la distance Terre-Soleil elle-même que l’on appelle UA pour Unité Astronomique

Et si $R^3/T^2 = 1$ alors $R^3 = T^2$

Conséquences ?

Commentaire sur la diapo précédente

- **$R^3 = T^2$**

- Voilà qui nous ouvre des horizons pour connaître les mêmes paramètres des autres planètes puisque ce rapport est le même, ce que l'on sait depuis Kepler

Connaissant la distance au Soleil d'une planète on peut aussitôt en déduire la période orbitale (sidérale) en extrayant la racine carré du cube de la distance

et réciproquement, connaissant la période sidérale d'une planète on obtient aussitôt sa distance au Soleil en extrayant la racine cubique du carré de la période

Commentaire sur la diapo précédente

- C’est ce qui peut être obtenu à partie de cette fameuse 3em loi de Kepler

Si $1^3/1^2 = 1$ pour la Terre,

ce 1 doit aussi être obtenu pour les autres planètes. Pour Mars qui est 1,5 fois plus loin du Soleil que la Terre, R3/T2= $1{,}5^3/T^2=1$ ou encore $1{,}5^3=T^2$

et $1{,}5^3 = 3{,}375\ldots = T^2$

et en extrayant la racine carrée de 3,375… nous obtenons T=1,84 ans pour la période sidérale de Mars

Commentaire sur la diapo précédente

- Mais en réalité notre problème n’est pas celui-là, car nous n’avons pas de chaine d’arpenteur pour mesurer la distance de Mars au Soleil.
- En revanche on pourrait savoir en combien de temps Mars boucle son orbite autour du Soleil si l’on pouvait l’observer depuis le Soleil, ou si nous étions sur Mars
- Mais on ne peut observer Mars que depuis la Terre, un lieu d’observation lui-même en mouvement.

Comment savoir la période sidérale d'une planète ?

1) Observer deux passage consécutifs au méridien de la planète depuis le Soleil

2) Observer deux passage consécutifs au méridien d'une même étoile depuis la planète elle-même

3) Seule solution réaliste : Observer deux passages consécutifs au méridien de la planète depuis la Terre ce qui nous fournira notre commune période synodique et nous en déduirons la période sidérale de la planète

Commentaire sur la diapo précédente

Nous ne pouvons observer que la période synodique Mars-Terre. C'est-à-dire le temps qui s'écoule entre deux alignements successifs de Mars avec la Terre, et avec le Soleil, par exemple.

Voyons comment se présente ce problème avec une analogie

Vous connaissez ce problème amusant ?

Sur une montre à aiguilles, à quelles heures les aiguilles se recouvrent-elles exactement ?
(à 10 secondes près)

Le temps écoulé entre deux superpositions d’aiguilles s’appelle la période synodique

Commentaire sur la diapo précédente

- Les plus impulsifs annoncent midi, puis 1h5mn, puis 2h 10 mn, puis 3h 15mn….. Rendez-vous tout de suite à 6h ½, mais l'erreur est maintenant bien visible car si la grande aiguille est bien sur le 30 des minutes, l'aiguille de l'heure est à mi-chemin entre 6 et 7 et non toujours sur 6.

- Alors comment se résout ce problème ?

Choisissons l'unité de temps minute.

La grande aiguille fait 1 tour de cadran (1TdC) en 60 minutes, alors que la petite le parcourt en 12 heures, soit 720 minutes. La grande aiguille distance la petite dès le départ de la cours et la rattrape lorsqu'elle aura fait exactement un tour de cadran de plus en un temps t. Ceci se traduit par l'équation suivante :

(1TdC/60) t – (1TdC/720)t = 1TdC

(1TdC/60 – 1TdC/720) t = 1TdC et en divisant par (1TdC) t

1/60 – 1/720 = 1/t = 0,015278

1/0,015278 = 65,45 minutes

C'est donc à chaque heure entière majorée de 5,45 minutes que les deux aiguilles se recouvriront exactement

0 h; 1h5,45 mn; 2h10,91mn; 3h16,3635mn; 4h21818; 5h27,2725mn; 6h32,727mn….

Commentaire sur la diapo précédente

- Pour revenir à notre problème il suffit d'imaginer que les planètes sont au bout des aiguilles et d'appliquer le même raisonnement.

- Dans notre problème La Terre qui est plus rapide que Mars car plus prés du Soleil est au bout de la grande aiguille tandis que Mars est au bout de le petite
- Mais au lieu de parler de TdC (Tour de cadran) parlons en terme de géométrie ce qui n'est pas plus compliqué. Et un tour de cadran se dit 2π (radians)
- Car la circonférence s'obtient par le produit de π par le diamètre (c'est-à-dire deux rayons de cercles).

Au bout de la grande aiguille mettez la Terre et au bout de la petite mettez Mars

$$(2\pi/pT)\,t - (2\pi/pP)t = 2\pi$$

Divisons par 2π et t

Si planète extérieure $1/\,pT - 1/pP = 1/t$

Si planète intérieure $1/\,pT + 1/pP = 1/t$

Commentaire sur la diapo précédente

- Au lieu de tours de cadrans parlons plutôt d’orbites complètes, c’est-à-dire 360 degrés ou 2π radians
- pT signifie période sidérale de la Terre et pP période sidérale de la planète, et **t** la période synodique, la seule que l’on puisse observer.

Prenons le cas de Mars, planète supérieure (ou extérieure) et déterminons sa période synodique «*t*» à partir de sa période sidérale de 1,8808 années terrestres

$$1/pT - 1/pM = 1/t$$

$$pT = 1 \Rightarrow \text{ donc } 1/pT = 1 \quad \text{ et } pM = 1{,}8808$$

Nous avons donc 1 – 1/1,8808 = 0,4683 = 1/t

et «*t*» = 1/0,4683 = 2,1353 = période synodique de Mars

Mais le problème à résoudre est inverse, car ce que nous observons est la période synodique et nous devons en déduire la période sidérale

Commentaire sur la diapo précédente

- pT pour période sidérale de la Terre et pM pour la période sidérale de Mars
- Le ***t*** représente le temps qui sépare deux moments où a position relative des deux planètes est la même (alignées avec le Soleil, par exemple, mais ce n’est qu’un choix arbitraire), c’est-à-dire la période synodique.
- C’est donc par le calcul, en manipulant cette équation selon les règles de l’algèbre que nous isoleront la période sidérale à partir de la période synodique, seule connue.

Les règles algébriques donnent tout de suite la solution

si $1 - 1/pM = 1/t$

***t* étant la période synodique que nous connaissons par l'observation,**

Alors $1 - 1/t = 1/pM$

Commentaire sur la diapo précédente

- L’algèbre nous donne la solution. Il suffit d’inverser les membres de l’équation.
- Celle-ci nous donnait la période synodique à partir de la période sidérale. En effet, en inversant les membres de l’équation, la période synodique nous donne la période sidérale.

$$1 - 1/t = 1/pM$$

et pour Mars, nous avons donc

$$1 - 1/2,1353 = 0,5317 = 1/pM$$

pM = 1,8808 (années-terrestres) = période sidérale

Commentaire sur la diapo précédente

- Pour le cas de Mars nous obtenons la période sidérale de 1,88 ans à partir d'une période synodique de 2,135 ans.

Déterminez la période sidérale à partir de la période synodique pour les 7 autres planètes

Planète	période synodique / Terre	Période sidérale	
Mercure	0,3173		
Vénus	1,5987		
Mars	2,1354	?	
Jupiter	1,0921		
Saturne	1,0352		
Uranus	1,0120		
Neptune	1,0061		

Commentaire sur la diapo précédente

- Après avoir observer les périodes synodiques des 7 planètes visibles depuis la Terre grâce au chronomètre et au calendrier dont vous comprenez qu’ils sont des instruments d’observation astronomiques, vous déterminez par le calcul (autre instrument d’astronomie) les périodes sidérales de ces planètes.
- Vous savez faire ? A vous de jouer

Périodes sidérales

Planète	période synodique / Terre	Période sidérale	
Mercure	0,3173	0,2408	
Vénus	1,5987	0,6152	
Mars	2,1354	1,8808	
Jupiter	1,0921	11,861	
Saturne	1,0352	29,446	
Uranus	1,0120	84,011	
Neptune	1,0061	164,79	

Commentaire sur la diapo précédente

Maintenant que vous avez déterminé les périodes sidérales de ces 7 planètes il ne vous reste plus qu'à calculer la distance à laquelle chacune d'elles se trouve du Soleil en utilisant la troisième loi de Kepler.

Maintenant en vertu de $R^3=T^2$ Déterminez la distance au Soleil

Planète	Période sidérale	Distance au Soleil
Mercure	0,2408	
Vénus	0,6152	
Mars	1,8808	?
Jupiter	11,8608	
Saturne	29,4463	
Uranus	84,0114	
Neptune	164,7930	

Commentaire sur la diapo précédente

- Connaissant maintenant les périodes sidérales des planètes du système solaire vous savez calculer leur distance au Soleil grâce à la 3em loi de Kepler

Distance des planètes au Soleil

Planète	Période sidérale	Distance au Soleil
Mercure	0,2408	0,38711
Vénus	0,6152	0,72334
Mars	1,8808	1,52367
Jupiter	11,8608	5,20088
Saturne	29,4463	9,53572
Uranus	84,0114	19,1819
Neptune	164,7930	30,0579

Commentaire sur la diapo précédente

- Ainsi, en partant de l'observation de la période synodique des planètes, nous avons pu calculer leur distance au Soleil, mais…. en UA.
- Et tant que nous ne savions pas la distance qui nous sépare du Soleil, c'est-à-dire ce que valait l'UA (en toise, en yards, en km… dans une unité connue), nous n'avions pas vraiment une connaissance de la distance entre les planètes, du Soleil aux autres étoiles, de la Galaxie…
- Le calcul de l'UA a certainement été l'exploit le plus important de l'astronomie, mais ce sera pour plus tard. En attendant nous devrons nous contenter de ne connaître les distances des planètes au Soleil que de façon relative. C'est-à-dire en nombre de fois plus éloignées ou plus proche que ne l'est la Terre du Soleil.

Maintenant un petit problème

Pourquoi dit-on qu'un satellite géostationnaire doit orbiter à 36000 km au-dessus de la surface du sol ? Justifiez le .

Rappel :

La Lune boucle son orbite à 384000 km du centre de la Terre en 27,3 jours, et le diamètre de la Terre est de 12700 km.

Commentaire sur la diapo précédente

- C’est une chose que vous devez maintenant savoir faire

Réponse

On a, pour la Lune (membre de gauche) et le satellite (membre de droite)

$384\,000^3/27{,}3^2$ = (rayon de l'orbite du satellite ?)^3/(période orbitale 1 jour)^2

Ce qui nous fait :

$$\sqrt[3]{\frac{384000^3}{27,3^2}}$$

ou

$$\frac{384\,000}{\sqrt[3]{27{,}3^2}} - 6350 = 36000\ km$$

Merci de votre attention

Serge Rochain

Commentaire sur la diapo précédente

- Au début de cet exposé je vous ai dit que Kepler n'avait pas compris cette étrange loi associant la période orbitale et l'éloignement de la planète.
- Il considérait que c'était une condition imposée par dieu comme c'était le cas pour beaucoup d'autres phénomènes naturels.
- Ce n'est que 60 ans plus tard que l'explication en sera donnée par Newton. Cette loi n'est qu'une conséquence d'une loi plus générale énoncée par Newton. C'est ce que nous verrons dans la seconde partie de l'initiation à la mécanique céleste.
  - **Merci de votre attention**