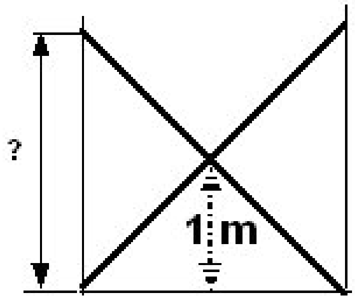
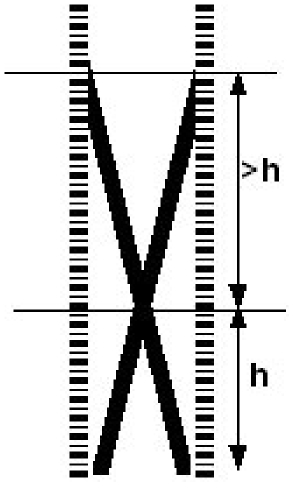
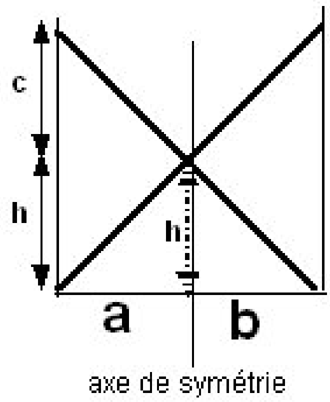
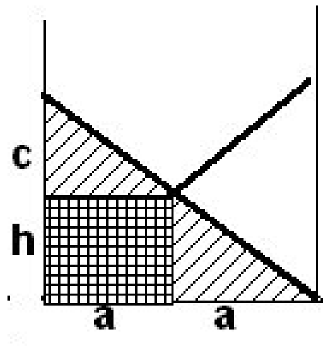
Le troisième problème d’échelles que je vous propose est le plus simple au sens où les échelles qui se croisent à 1 mètre de hauteur dans le couloir sont de mêmes longueurs. La question est la suivante : Sachant que ces deux échelles sont chacune calées à l’angle du sol et d’une paroi du couloir, à quelle hauteur au dessus du sol prennent-elles appui sur la paroi opposée ? Le schéma ci-dessous à gauche détail le problème.







Les deux échelles étant de même longueur il semble évident qu’il existe une symétrie verticale, centrée sur le point de croisement des échelles, telle que **a = b** dans la représentation figure de droite. En revanche, la symétrie horizontale ne semble pas intuitivement acquise. En effet, on peut imaginer un axe rigide traversant deux échelles très longues à un mètre de hauteur alors que les échelles seraient de plusieurs mètres. L’axe les rendant solidaire, se serait la largeur du couloir qui « absorberait » l’asymétrie qui souligne que si **h = 1** la partie haute au dessus du point de croisement est plus grande que **h** figure ci-dessus au centre. En fait, cette vision est totalement imaginaire et je me suis aidé de la largeur des traits pour créer l’illusion d’optique correspondant à cette fiction. La réalité est telle que pour que l’asymétrie suggérée ici soit avérée, le point haut des échelles est plus espacé que leur point bas et nous allons prouvé que si les deux échelles reposent bien sur les mêmes verticales en haut et en bas, la hauteur au-dessus du point de croisement est rigoureusement égale à celle qui sépare ce dernier du niveau du sol. Dans cette éventualité, quel que soit la hauteur du point de croisement nous devons toujours avoir **c = h** comme représenté dans le schéma ci-dessus à droite. En revanche, nous avons admis la symétrie centrée sur l’axe vertical passant par le point de croisement, nous savons donc que **a+b = 2a.** Comment prouver que **c = h** ? Considérons le schéma ci-dessous :



Nous pouvons identifier la somme des aires du triangle **ca** + celle du rectangle **ha** plus celle du triangle **ha** à la surface du grand triangle entièrement rayé $\frac{2a(c+h)}{2}$.

Ce qui nous donne l'identité : $\frac{2a\,(c+h)}{2} = \frac{ac}{2} + ah + \frac{ah}{2}$

En multipliant par 2 nous obtenons : $2a\,(c+h) = ac + 2ah + ah$

Puis : $2ac + 2ah = ac + 3ah$

En soustrayant $(2ah + ac)$ à chaque membre de l'équation ci-dessus nous obtenons :

$ac = ah$ et en divisant par a il reste $\boldsymbol{c = h}$ …… CQFD !

Ainsi, quelle que soit la longueur des échelles, le point de contact supérieur des échelles est toujours le double de la hauteur du point de croisement. En l'occurrence, dans le problème posé, il s'agissait donc d'une hauteur de 2m.