

Le problème des deux échelles qui se croisent dans un couloir

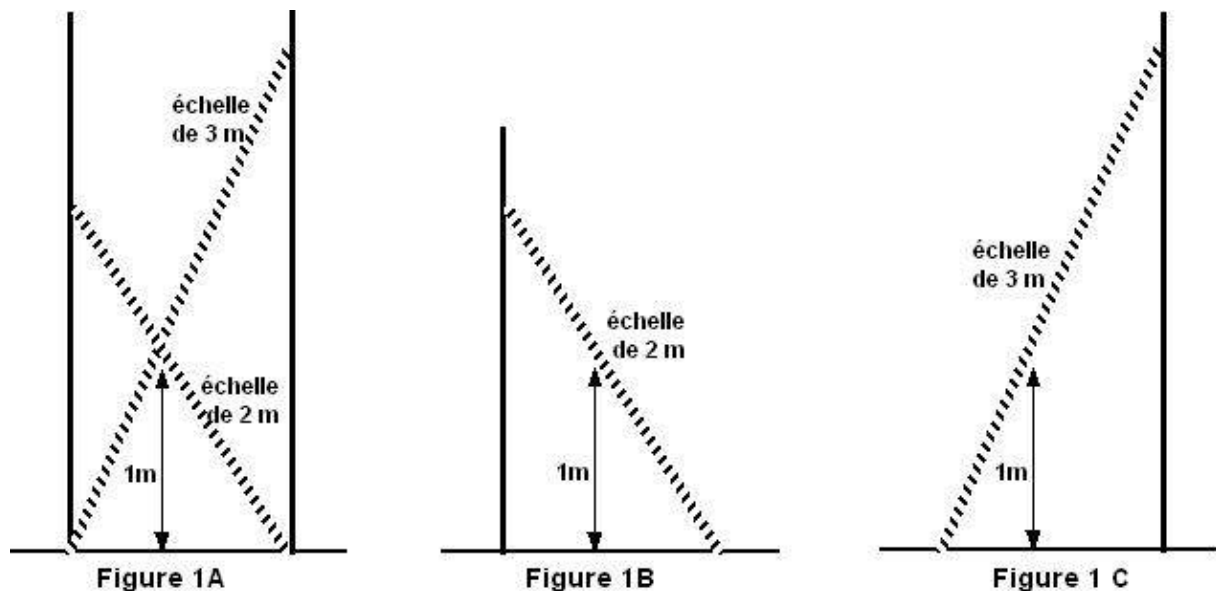
Parmi les problèmes amusants et délectables, celui des deux échelles dans un couloir tient une place de choix, car sous une apparence de grande simplicité il s'y cache une énigme redoutable dont la recherche de solution en a dérouté plus d'un. En effet, la solution implique une équation du quatrième degré, ce qui n'est pas un problème spécialement simple.

Le problème :

Deux échelles sont appuyées chacune sur les parois opposées d'un couloir. L'une d'elle fait trois mètres de haut et l'autre deux. Elles se croisent un mètre au-dessus du sol.

La question est : **Qu'elle est la largeur du couloir ?**

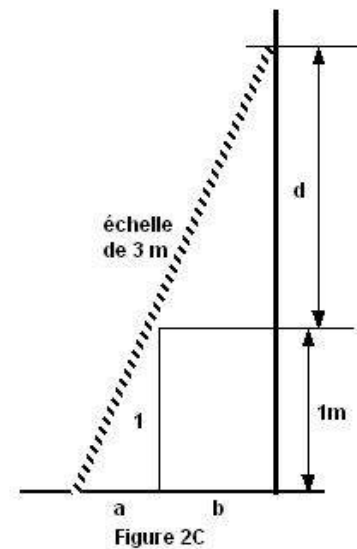
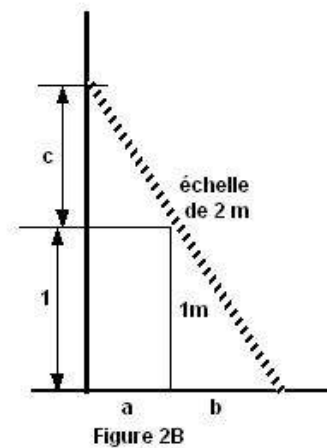
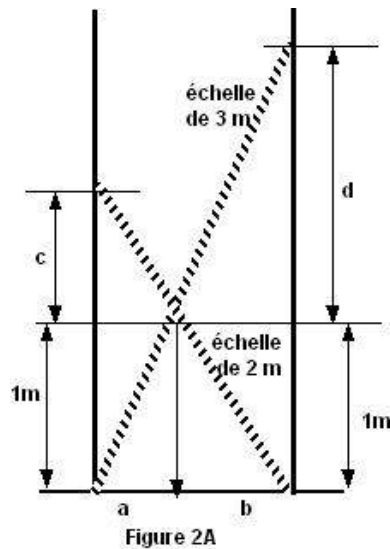
Le schéma de la situation est visible sur la figure 1A ci-dessous à gauche. Intuitivement on voit que la démarche à engager doit nous conduire à une des deux figures 1B ou 1C à partir desquelles la résolution du théorème de Pythagore doit nous fournir la réponse attendue. Connaissant l'hypoténuse du triangle de la figure 1B ou celui de la figure 1C qui ne sont autre que les longueurs des échelles il « suffit » de connaître la hauteur depuis le sol du point des parois sur lesquels reposent les échelles pour en conclure la largeur du couloir.



De ces hauteurs, nous savons qu'elles sont situées à plus d'un mètre et moins de deux pour celle de la figure 1B et à plus d'un mètre et moins de trois pour celle de la figure 1C. Nous connaissons les deux hypoténuses mais surtout nous savons qu'une variable est commune aux deux triangles, la base qui n'est autre que la largeur du couloir, la réponse à la question.

Cette variable commune est elle-même la somme de deux variables **a** et **b** (voir figure 2A ci-dessous) dont les proportions relatives sont fixées par le point de croisement des deux échelles, donc de leur longueur, et par suite des deux hauteurs dont on se propose de déterminer la valeur. Le rapport de ces deux variables **a** et **b** est donc la clef du problème de la détermination de **c** et **d** auxquels l'ajout d'un mètre fourni le côté du triangle nous permettant de calculer sa base.

Isolons chaque segment identifiable sur la figure 2A et proposons nous de déterminer la valeur relative de **d** par rapport à **a**, **b**, et **c** et la valeur relative de **c** par rapport à **a**, **b**, et **d**.



Première étape (Figure 2C) : Détermination de d par rapport à a et b .

La surface du grand triangle, dont l'échelle de 3 m est l'hypoténuse, est égale à la largeur du couloir $(a+b)$ multiplié par la hauteur $(1+d)$ et divisé par 2.

Mais c'est aussi la somme de la surface des deux petits triangles et du rectangle. Le sommet en haut à gauche du triangle est le point de croisement des deux échelles.

Nous avons donc l'équation suivante :

$$(a+b)(1+d)/2 = bd/2 + a/2 + b \quad \text{en effectuant les produits nous avons :}$$

$$(a+ad+b+bd)/2 = (bd + a + 2b) / 2 \quad \text{et en multipliant les deux membres par deux :}$$

$$a+ad+b+bd = bd + a + 2b \quad \text{en supprimant les termes identiques dans les deux membres :}$$

$$ad = b$$

En développant le même raisonnement sur la figure 2B qui est symétrique à 2C nous arriverons à l'équation $bc = a$.

Ces deux derniers résultats peuvent aussi s'écrire :

$$a/b = c \quad \text{et} \quad b/a = d \quad \text{ce qui conduit à l'identité fondamentale } \mathbf{d = 1/c}$$

qui nous permettra de restreindre le problème à une seule inconnue : c

Mais nous avons de la même façon $c = 1/d$ qui nous permettrait de restreindre le problème à la seule inconnue d ce qui semble équivalent a priori puisque par rapport au point de croisement des échelles la situation est symétrique et équivalente. Nous pouvons donc choisir entre les deux solutions mais je choisis l'inconnue c pour une raison qui apparaîtra évidente plus loin.

La largeur du couloir étant la partie commune aux deux échelles nous avons la relation :

$$9-(d+1)^2 = 4-(c+1)^2 \quad \text{et en remplaçant } \mathbf{d \text{ par } 1/c} \text{ nous n'avons plus qu'une seule inconnue : } c$$

$$9-(1/c+1)^2 = 4-(c+1)^2 \quad \text{en effectuant les produits :}$$

$$9- 1/c^2 -1- 2/c = 4 - c^2 -1- 2c \quad \text{en multipliant par } c^2$$

$$9c^2 -1- c^2 - 2c = 4c^2 - c^4 - c^2 - 2c^3 \quad \text{en regroupant par ordre décroissant de puissance :}$$

$$c^4 + 2c^3 + 5c^2 - 2c -1 = 0 \quad \text{On reconnaît l'équation générale du quatrième degré.}$$

En résolvant cette équation on trouve $c = 0,5761207$

La légitime question est : Comment trouve t-on ce résultat ? Voir plus bas, mais continuons pour répondre à la question d'origine : **Qu'elle est la largeur du couloir ?**

Puisque nous avons déterminé la longueur du segment c, il suffit de l'augmenter de 1 mètre pour connaître la hauteur du triangle rectangle dont l'hypoténuse est représenté par l'échelle de 2m.

Le théorème de Pythagore vient aisément à bout du problème (pour autant que vous lui fassiez confiance... Etes vous certain qu'il est exacte ?) :

Largeur du couloir = $(4 - 1,5761207^2)^{1/2} = 1,231$ mètres.

Revenons sur la solution de l'équation du quatrième degré qui est la véritable difficulté de ce problème.

C'est le mathématicien italien Ludovico Ferrari (1522-1565) qui a résolu l'équation du quatrième degré. Elève puis collaborateur de Cardan, qui avait résolu l'équation du troisième degré, Ferrari ramène celle du quatrième degré à l'équation du troisième degré par un artifice remarquable. Je ne vais pas vous détailler la méthode que vous pouvez trouver dans de nombreux ouvrages et sur Internet, mais je vais vous donner une méthode moderne qui exploite les moyens d'aujourd'hui, c'est-à-dire la puissance de l'ordinateur, bien que pour l'exemple dont il s'agit qui est très simple une calculatrice suffise.

C'est d'ailleurs ce que j'ai fait pour atteindre les trois premiers chiffres après la virgule (le mm) avant d'avoir l'idée de rédiger un petit programme pour vous montrer la puissance des méthodes algorithmiques.

Le principe de l'algorithme consiste à attribuer une valeur arbitraire à l'inconnue dont on cherche à déterminer la valeur réelle satisfaisant à l'équation dont elle fait partie, puis à la suite d'un premier calcul basé sur cette hypothétique valeur, constater l'inadéquation résultante. Cette inadéquation se traduit par un déséquilibre de l'équation dont l'amplitude est proportionnée à l'écart entre l'inconnue satisfaisant à l'équation et la valeur arbitraire qui lui a été donnée. Le sens de l'écart permet de savoir si l'estimation était trop faible ou trop importante et la valeur de l'écart permet de juger de l'amplitude de la modification à appliquer sur la valeur estimée précédente.

En recommençant avec une valeur corrigée de l'amplitude estimée par le calcul précédent, on obtient un déséquilibre plus faible que dans le calcul précédent, et il suffit de recommencer autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que l'équation soit satisfaite.

Dans l'équation ci-dessus, un moyen simpliste consiste à commencer le premier calcul avec une valeur suffisamment basse pour nous permettre d'atteindre à coup sûr le résultat souhaité avec jusqu'à 5 chiffres après la virgule, par exemple 0,000001 puis recommencer en l'incrémentant de cette valeur. Mais l'on voit, puisque nous connaissons le résultat (0,5761207), qu'il nous faudra exécuter près de 600 000 fois le calcul avant d'obtenir une équation équilibrée. Même si les ordinateurs sont rapides, ce n'est pas la peine de gaspiller leur temps, d'autant plus que pour certains problèmes relevant de l'algorithmique cette solution ne pourrait pas être retenue tant l'amplitude du domaine possible de la valeur réelle de la variable est importante. Il va de soit que l'algorithmique à d'autres tours dans son sac.

Pour ne pas vous troubler avec le problème de l'équation du quatrième degré je vous invite d'abord à faire connaissance avec les outils de cette branche des mathématiques sur un problème plus simple qui met en œuvre certains de ses principes. Nous reviendrons ensuite sur son application dans le cadre du problème des échelles.

Une méthode permettant d'extraire une racine carrée, va bien au-delà de ce que l'on peut croire en étendant à cette « curiosité » les supposées vertus que les « anciens » attribuaient à la connaissance des tables de multiplication, elles aussi dépassées par les calculettes les plus rudimentaires. Je vous accorde que la maîtrise des tables de multiplication n'est qu'une démonstration du « par cœur », tandis que celles permettant de savoir extraire une racine carrée (du moins pour certaines méthodes) ouvrent l'esprit sur la logique mathématique et notamment sur l'algorithmique, branche ancienne et oubliée durant deux siècles jusqu'à ce que l'informatique la sorte de sa torpeur en la découvrant comme étant la clef du calcul numérique appliqué aux processus automatiques.

Imaginez le problème de l'extraction de racine de la façon suivante :

A) Conditions du problème.

- 1) Je dispose d'une figure carrée dont je connais la surface et pour laquelle je souhaite connaître le côté.
- 2) Je peux dire n'importe quel côté puisqu'ils sont identiques.

B) Quelques considérations indépendantes du problème (pour l'instant).

- 1) Si je divise la surface d'un rectangle par son petit côté, j'obtiens le grand côté.
- 2) Si je divise la surface de ce même rectangle par son grand côté, j'obtiens le petit.

C) Intégrations de ces considérations dans le problème de l'extraction de racine carrée.

- 1) Si je divise la surface de mon carré par un nombre quelconque et que j'obtiens un quotient, par pur hasard, égal à ce diviseur arbitraire, du même coup j'ai la racine recherchée.
- 2) Si je divise la surface de mon carré par un nombre quelconque trop grand pour être la racine, j'obtiens un quotient qui sera d'autant plus petit par rapport à ce que doit être la racine que le diviseur choisi arbitrairement était trop grand.
- 3) Réciproquement, si je divise la surface de mon carré par un nombre quelconque trop petit pour être la racine, j'obtiens un quotient qui sera d'autant plus grand par rapport à ce que doit être la racine que le diviseur choisi arbitrairement était trop petit.
- 4) Ainsi, dans les cas 2) et 3) si je fais une moyenne entre le diviseur arbitraire et le quotient qui en résulte, j'obtiens un résultat plus proche de la racine que ne l'était le diviseur arbitraire.
- 5) Il ne reste qu'à recommencer l'opération avec ce « nouveau » diviseur beaucoup moins arbitraire que le précédent.
- 6) Il suffit de répéter ce processus itératif en prenant à chaque fois pour nouveau diviseur la moyenne du quotient obtenu à l'opération précédente et du diviseur ayant permis de l'obtenir jusqu'à ce que le nouveau quotient soit égal au diviseur qui a permis de l'obtenir sur un nombre de décimales correspondant à la précision recherchée.

C'est exactement ce qui se passe quand vous appuyez sur la touche racine de la calculette après avoir introduit un carré C. Cet algorithme qui met à profit les possibilités de calcul rapide des processeurs s'exprime de la façon suivante :

$x_1 = \frac{1}{2} * (C/x_0 + x_0)$ qui représente la première des itérations successives.

La suivante étant : $x_2 = \frac{1}{2} * (C/x_1 + x_1)$ etc,

jusqu'à $x_{n+1} = \frac{1}{2} * (C/x_n + x_n)$ tel que $x_{n+1} = x_n$

Un tableur permet de visualiser facilement cette notion de convergence, comme dans l'exemple ci-dessous (figure 3). 5 exemples différents (2, 3, 10, 100, et 1000000) sont donnés dans la largeur de la feuille de calcul. 2 colonnes sont utilisées pour chacun d'eux. La première indique le carré dont on cherche à connaître la racine et la seconde colonne montre l'évolution de la variable x depuis $x_0 = 1$ jusqu'à $x = n$ lorsque deux valeurs consécutives sont égales, ce qui arrête le calcul. 1 est choisi arbitrairement comme valeur de x_0 et donc d'autant plus éloigné de la valeur réelle de la racine que celle ci est grande, ce qui se traduit par un nombre d'itérations plus élevé pour atteindre le résultat exact. Ce qui ne fait que 5 itérations pour racine de 2 en fait 15 pour 1 million. Il n'est donc pas judicieux de partir systématiquement de la même valeur quel que soit le carré dont on cherche la racine. Dans la partie basse du tableau les mêmes 5 exemples sont repris avec des choix différents et plus judicieux pour la variable d'initialisation x_0 . L'objectif est d'obtenir une valeur aussi proche que possible de la racine exacte par un moyen déterministe.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	carré	racine		carré	racine		carré	racine		carré	racine		carré	racine
2	2		1	3		1	10		1	100		1	1000000	
3		1,5			2			5,5			50,5			500000,5
4		1,416666667			1,75			3,659090909			26,24009901			250001,2499
5		1,414215686			1,732142857			3,196005082			15,02553012			125002,6249
6		1,414213562			1,73205081			3,162455623			10,84043467			62505,31241
7		1,414213562			1,732050808			3,162277665			10,03257851			31260,65553
8					1,732050808			3,16227766			10,00005289			15646,32231
9								3,16227766			10			7855,117546
10											10			3991,211544
11														2120,881016
12														1296,191593
13														1033,841239
14														1000,553871
15														1000,000153
16														1000
17														1000
18														
19	carré	racine		carré	racine		carré	racine		carré	racine		carré	racine
20	2		2	3		2	10		7	100		22	1000000	2222
21		1,5			1,75			4,214285714			13,27272727			1336,022502
22		1,416666667			1,732142857			3,293583535			10,40348692			1042,256445
23		1,414215686			1,73205081			3,164895057			10,00782438			1000,856606
24		1,414213562			1,732050808			3,162278742			10,00000306			1000,000367
25		1,414213562			1,732050808			3,16227766			10			1000
26					1,732050808			3,16227766			10			1000
27														

Figure 3

La seule valeur connue au départ est le carré lui-même, c'est donc en fonction de ses caractéristiques qu'il faut choisir la variable initialisant x_0 .

L'arsenal mathématique possède une branche appelée théorie des nombres. Celle ci considère les mathématiques comme un objet d'étude pour lui-même. On lui doit de nombreux acquis comme les logarithmes, par exemple, ou encore des méthodes visant à catégoriser les nombres comme la démonstration de la transcendance de PI ou l'irrationalité de racine de deux

Ici, il s'agit de trouver une valeur de x_0 qui ne soit pas trop éloignée de la racine réelle afin de minimiser le nombre d'algorithmes nécessaire à l'obtention du résultat.

Nous savons que le carré d'un nombre qui s'écrit avec n chiffres conduira au maximum à un résultat qui s'écrira avec $2n$ chiffres s'il est grand et avec $2n-1$ chiffres s'il est petit. Ceci nous catégorise déjà la racine qui sera constituée avec des chiffres de poids fort entre 1 et 5 ou entre 5 et 9, nous choisirons 2 pour le premier cas et 7 pour le second. Par ailleurs la valeur donnée à x_0 aura un nombre de chiffre égal à la moitié de celui du carré ou la moitié moins 1. Ainsi, pour un carré ne comprenant qu'un seul chiffre, $x_0 = 2$
 S'il en contient 2 $x_0 = 7$, s'il en contient 3, $x_0 = 22$, s'il en contient 4, $x_0 = 77$, s'il en contient 5, $x_0 = 222$, etc.

En initialisant x_0 avec cette méthode avant de lancer l'algorithme convergent qui permettra d'atteindre la valeur exacte de la racine, on restreint le nombre d'algorithmes à un nombre voisin quelle que soit l'amplitude du carré. C'est ce que l'on peut constater sur les 5 exemples donnés en partie basse du tableau Figure 3 ci-dessus. On peut voir que le bénéfice de cette initialisation intelligente de la valeur d'origine donnée à la variable x_0 est d'autant plus important en économie d'itérations que le carré dont on cherche à connaître la racine est grand, comme le soulignent les exemples à la droite du tableau en partie basse (Figure 3).

Les méthodes algorithmiques disposent de différentes propriétés comme la rapidité de convergence par exemple. Lorsque la précision gagnée à chaque itération double par rapport à la précédente on dit quelle est d'ordre deux, c'est le cas de l'algorithme d'extraction de racine ci-dessus. Ces méthodes permettent toutes de converger vers le résultat mais pas toujours de la même façon. Dans certains cas, dits alternés, les résultats intermédiaires convergent vers la cible en l'encadrant de plus en plus près alternativement par défaut et par excès, alors que d'autres méthodes peuvent tendre vers le résultat par valeurs toujours inférieure ou toujours supérieure selon la valeur initiale imposée à la variable. Ce sont les caractéristiques du problème à résoudre qui conditionnent les propriétés de l'algorithme à imaginer.

Par exemple, dans notre problème d'échelles qui se croisent dans un couloir nous pouvons essayer d'imaginer un algorithme permettant de déterminer la valeur c à tous les niveaux (toutes les équations) dans lesquelles c apparaît comme la seule inconnue. C'est-à-dire dans la liste suivante reprise du raisonnement développé plus haut :

$$\begin{aligned} 9 - (1/c+1)^2 &= 4 - (c+1)^2 \\ 9 - 1/c^2 - 1 - 2/c &= 4 - c^2 - 1 - 2c \\ 9c^2 - 1 - c^2 - 2c &= 4c^2 - c^4 - c^2 - 2c^3 \\ c^4 + 2c^3 + 5c^2 - 2c - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Nous ne sommes pas contraints de rechercher l'algorithme uniquement au niveau de la forme normalisée de l'équation du quatrième degré, c'est-à-dire la dernière équation. Ce ne serait d'ailleurs pas un choix très judicieux car elle se présente sous la forme de termes dont les premiers sont à des puissances élevées (4 et 3) ce qui amplifierait considérablement les écarts entre les valeurs approchées donnée à c et sa valeur réelle ce qui entraînerait une faible vitesse de convergence. Par ailleurs le résultat de l'équation conséquent à la variable convergente c serait toujours comparé à la valeur nulle (0) du second membre sans que ce second membre prenne une part active à la détermination de c .

En revanche la première équation $9 - (1/c+1)^2 = 4 - (c+1)^2$ présente beaucoup d'intérêts.

En effet, les deux membres utilisent c à la même puissance (2, c'est-à-dire au carré) et les deux membres sont du même ordre de grandeur ce qui assure une certaine régularité dans la convergence. C'est donc certainement le bon choix.

Plus haut j'ai dit qu'après une petite hésitation j'ai choisi de prendre c comme inconnue au lieu de d avec de bonnes raisons qui apparaîtront évidente plus loin.

C'est le moment de le comprendre la raison de ce choix.

Puisque l'échelle coté de la verticale $1+c$ a une longueur de 2 mètres, nous savons que c est supérieur à 0 et inférieur à 1, alors que l'échelle coté de la verticale $1+d$ a une longueur de 3 mètres, ce qui implique pour d une valeur supérieure à 0 et inférieure à 2. L'incertitude sur la valeur de c est donc moitié moindre que pour celle de d , d'où la raison de choisir c pour unique inconnue. L'inconnue dont il faut cerner la valeur se situe dans une fourchette deux fois plus petite avec c plutôt qu'avec d .

Le principe algorithmique doit mettre en œuvre trois caractéristiques fondamentales :

- Le principe qui permet à l'inconnue de tendre vers la solution.
- Le moyen de savoir que la solution est atteinte.
- Le moyen de faire évoluer la variable représentant l'inconnue.

Pour bien illustrer la méthode algorithmique appliquée au problème des deux échelles croisées j'ai imaginé deux procédés partiellement différents que je détaille successivement :

Premier procédé :

Ici nous allons faire d'une pierre, deux coups en répondant aux deux premières exigences avec un moyen commun. Nous allons utiliser l'équation elle-même pour satisfaire ces deux critères.

Pour les deux méthodes nous savons que $0,1 < c < 0,9$ et considérons globalement l'équation $\alpha = \beta$ symbolisant $9 - (1/c + 1)^2 = 4 - (c + 1)^2$

Définissons le domaine des variables α et β pour les valeurs extrêmes approximatives de c

Pour $c = 0,1$ nous obtenons $\alpha = -112$ et $\beta = +2,79$

Pour $c = 0,9$ nous obtenons $\alpha = +4,54$ et $\beta = +0,39$

Pour des valeurs croissantes de c on voit que α est croissant tandis que β décroît. Mais quelques part entre ces extrêmes ils sont égaux par définition de ce qu'est une équation et ce cas particulier ce réalise lorsque la valeur attribuée à c est bien racine de l'équation.

Lorsque α sera égal à β à travers l'évolution de c sur un nombre de décimales fixé à l'avance (précision demandée) la recherche de la solution sera terminée et cette dernière sera égale à la valeur courante de c à ce moment précis.

La troisième exigence consistant déterminer le moyen permettant de faire évoluer la variable c repose sur la moyenne de deux variables dont la première est issue des deux extrêmes 0,1 et 0,9, soit 0,5 qui nous donne un résultat de calcul des premiers α et β . L'évolution suivante de c dépend du résultat de ce calcul.

Si $\alpha < \beta$, alors c était estimé trop petit et sa nouvelle valeur sera la moyenne entre cette trop petite valeur et la dernière plus grande valeur connue de c , en l'occurrence 0,9 pour le début de l'algorithme. Ceci donnera pour c une nouvelle valeur approximative de $(0,5 + 0,9)/2 = 0,7$.

Si $\alpha > \beta$, alors c était estimé trop grand et sa nouvelle valeur sera la moyenne entre cette trop grande valeur et la dernière plus petite valeur connue de c , en l'occurrence 0,1 pour le début de l'algorithme. Ceci donnerait une nouvelle valeur approximative de $(0,5+0,1)/2 = 0,3$, mais en l'occurrence ce ne peut pas être le cas à l'initialisation car $\alpha = -112$ et $\beta = +2,79$ comme vu plus haut. En revanche cette éventualité se produira durant le déroulement de l'algorithme avant que α ne soit égal à β .

Nous avons satisfait au trois exigence d'un algorithme devant converger vers la solution et sa logique se récapitule de la façon suivante :

Les abréviations suivantes sont utilisées :

DPG pour dernière plus grande valeur de c

DPP pour dernière plus petite valeur de c

EC pour valeur en cours de c

α pour $9-(1/c+1)^2$

β pour $4-(c+1)^2$

0,1 → DPP

0,9 → DPG

Boucle itérative.

Calcul de la moyenne entre DPP et DPG → EC

Calcul α ∫ EC

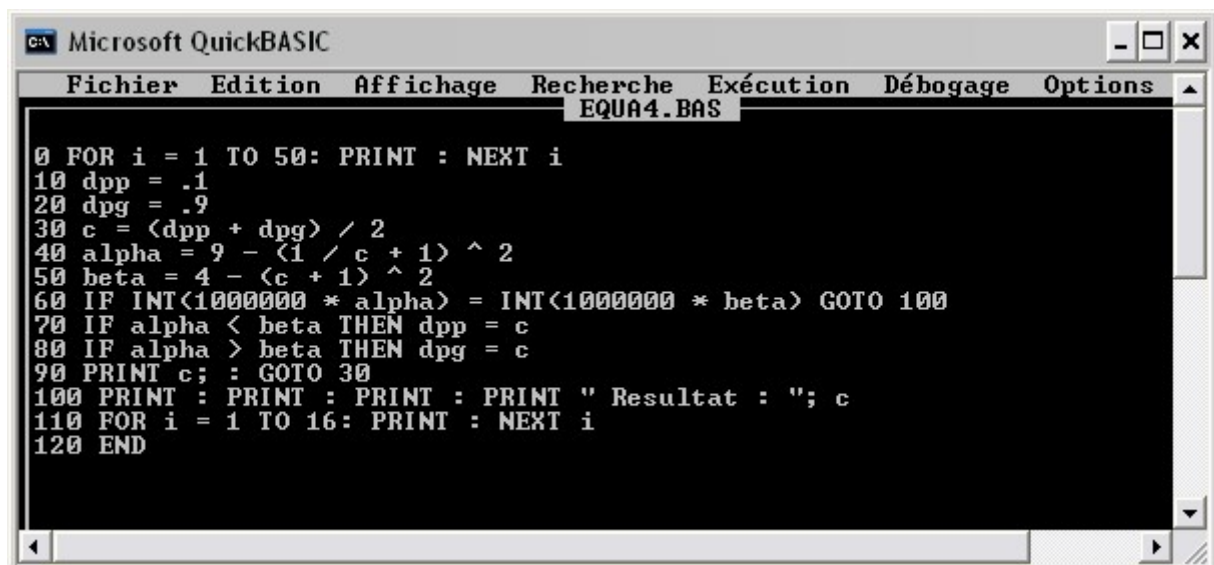
Calcul β ∫ EC

Si $\alpha = \beta$ alors **résultat = EC. Fin de programme.**

Si $\alpha < \beta$ alors EC → DPP sinon EC → DPG

Retourner à Boucle itérative

Cette logique se retrouve dans le programme suivant rédigé en Basic (Figure 4) :



```

Microsoft QuickBASIC
Fichier Edition Affichage Recherche Exécution Débogage Options
EQUA4.BAS
0 FOR i = 1 TO 50: PRINT : NEXT i
10 dpp = .1
20 dpg = .9
30 c = (dpp + dpg) / 2
40 alpha = 9 - (1 / c + 1) ^ 2
50 beta = 4 - (c + 1) ^ 2
60 IF INT(10000000 * alpha) = INT(10000000 * beta) GOTO 100
70 IF alpha < beta THEN dpp = c
80 IF alpha > beta THEN dpg = c
90 PRINT c; : GOTO 30
100 PRINT : PRINT : PRINT " Resultat : "; c
110 FOR i = 1 TO 16: PRINT : NEXT i
120 END

```

Figure 4

Dans ce programme, les lignes notées 0, 110 et 120 n'ont qu'une fonction de présentation lors de l'exécution du programme et n'ont aucune utilité pour la solution du problème.

L'exécution de ce programme dont la rédaction est infiniment plus rapide que la recherche de

la solution mathématique de l'équation du quatrième degré par la méthode de Ferrari est représentée figure 5 :

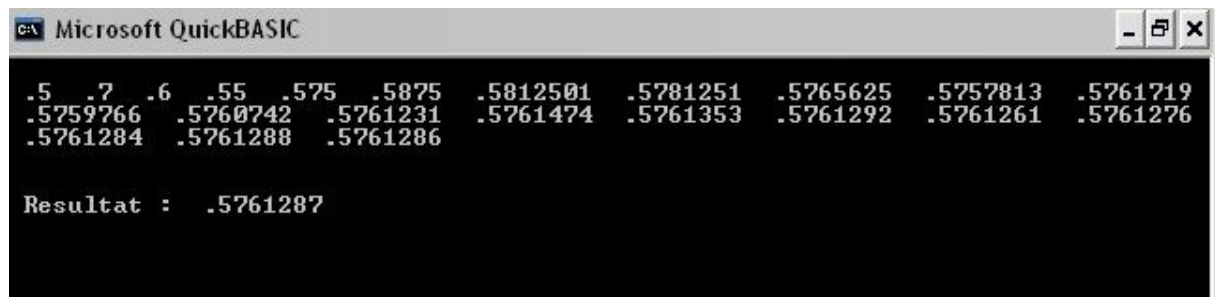


Figure 5

L'évolution de la variable e dont la valeur évolutive aboutie à la racine de l'équation du quatrième degré est listée afin de montrer la façon dont elle a convergée pour atteindre 0,5761287 (Figure 5).

On voit qu'il aura suffi de 23 itérations de la boucle de calcul pour atteindre le résultat, soit quelques centièmes de secondes sur un micro-ordinateur du commerce.

On remarque aussi que la variable e oscille à plusieurs reprises autour de la valeur cible de temps en temps au-dessus et à d'autres moments au-dessous, avant d'atteindre le résultat.

Onze des résultats intermédiaires se situent sous la valeur réelle et douze d'entre eux se situent au-dessus, la convergence est parfaitement symétrique.

J'ai également rédigé un autre algorithme pour vous montrer la richesse des ressources de l'algorithmique. Ici, pour déterminer la fin de la boucle itérative, je n'utilise pas l'identité de résultat entre α et β comme dans le programme précédent mais l'identité entre deux valeurs consécutives de e appelées c et $c2$ dans le programme (Figure 6).

The screenshot shows a window titled "Microsoft QuickBASIC" with a menu bar (Fichier, Edition, Affichage, Recherche, Exécution, Débogage, Options, Aid) and a file name "EQU4-2.BAS". The code is as follows:

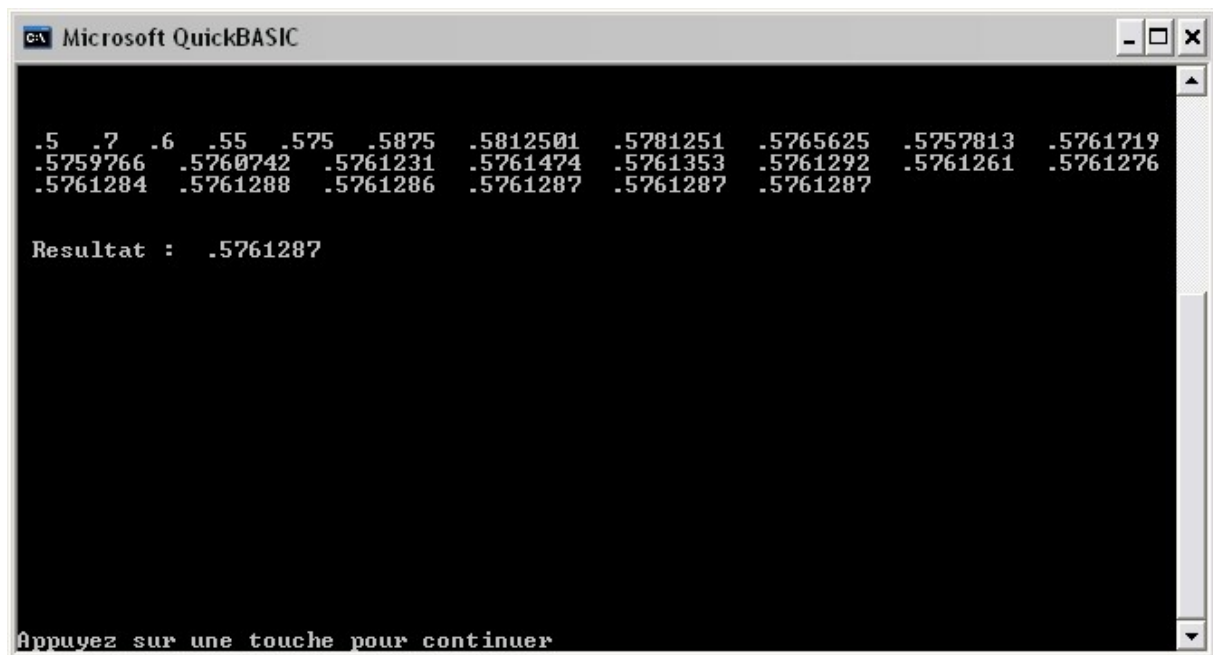
```

0 FOR i = 1 TO 50: PRINT : NEXT i
10 dpp = .1
20 dpg = .9
30 c = (dpp + dpg) / 2
40 alpha = 9 - (1 / c + 1) ^ 2
50 beta = 4 - (c + 1) ^ 2
60 IF c2 = c GOTO 100
70 IF alpha < beta THEN dpp = c
80 IF alpha > beta THEN dpg = c
90 PRINT c; : c2 = c: GOTO 30
100 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT " Resultat : "; c
110 FOR i = 1 TO 16: PRINT : NEXT i
120 END

```

Figure 6

Le résultat de ce programme figure 7 ne diffère du précédent que sur la fin de l'exécution car l'égalité des deux variables e et $e2$ est plus tardive que l'égalité entre a et b limitée à 6 décimales.



```
Microsoft QuickBASIC

.5 .7 .6 .55 .575 .5875 .5812501 .5781251 .5765625 .5757813 .5761719
.5759766 .5760742 .5761231 .5761474 .5761353 .5761292 .5761261 .5761276
.5761284 .5761288 .5761286 .5761287 .5761287 .5761287

Resultat : .5761287

Appuyez sur une touche pour continuer
```

Figure 7

Cette égalité semble être déjà atteinte 2 itérations avant la fin mais ce n'est qu'une apparence car le dernier chiffre n'apparaît pas à l'affichage.

Pour le problème dont il s'agit ici, il n'est pas utile de pousser la précision des calculs aussi loin et 3 décimales suffisent puisqu'elles permettent de calculer la largeur du couloir en millimètres. J'avais fait ce calcul à la main à l'aide d'une calculatrice et 10 itérations avaient suffies pour obtenir le résultat, soit quelques cinq minutes de calculs à peu près.

Il faut surtout retenir que l'algorithmique est souvent la meilleure solution pour résoudre un problème complexe dans lequel l'algèbre peine à conduire vers la solution. Pour information, le temps que j'ai pris pour écrire ces programmes, les exécuter et rédiger ce mémo sur le problème des deux échelles du couloir est certainement moindre que celui qu'il en aurait fallu pour résoudre l'équation du quatrième degré en appliquant la méthode de Ferrari... et sans erreurs de calcul.