Cette présentation vise à expliquer la loi de Kepler comme conséquence de la loi de gravitation et fait donc suite à l’exposé sur la mesure des distances dans le système solaire.

En 1672, Cassini profite de l’opposition exceptionnellement favorable de Mars (54 millions de km) pour estimer sa distance par triangulation (Paris-Cayenne) et de là, par application de la troisième loi de Kepler il obtient une estimation assez précise de l’UA avec 146 millions de km.

La loi de gravitation et ses conséquences

Le génie de Newton

Lois de Kepler

Détermination de la masse des corps célestes

Détermination des temps orbitaux

Détermination des distances orbitales

Expression de la loi de gravitation

$$F = G\frac{m1\,m2}{d^2}$$

Cette loi exprime, en newtons (N*), que deux corps de masse ***m1*** et ***m2*** s'attirent avec une force ***F*** (N) qui est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance ***d*** qui les sépare

G est la constante de gravitation qui relie les différentes unités employées. ***G* = *6,67*10⁻¹¹*** dans le Système International (SI), dans lequel le temps s'exprime en seconde et les distance en mètres.

*) **Un newton est la force colinéaire au mouvement qui, appliquée pendant une seconde à un objet d'un kg, en modifie la vitesse d'un mètre par seconde**.

Ainsi une pomme de masse m1 est attirée par la Terre de masse m2 avec une force F, mais la Terre est attirée par la pomme avec la même force F.

Dire que c'est la pomme qui tombe sur la Terre et non la Terre qui tombe sur la pomme est une question de point de vue.

Un minuscule microbe se promenant sur la pomme verrait la Terre se précipiter sur lui. Il reste que nous avons pris l'habitude de considérer notre référentiel immobile. Et bien campés sur nos deux pieds au sol nous nous assimilons à l'apparent immobilisme de la Terre et nous considérons donc que c'est bien la pomme qui tombe sur la Terre.

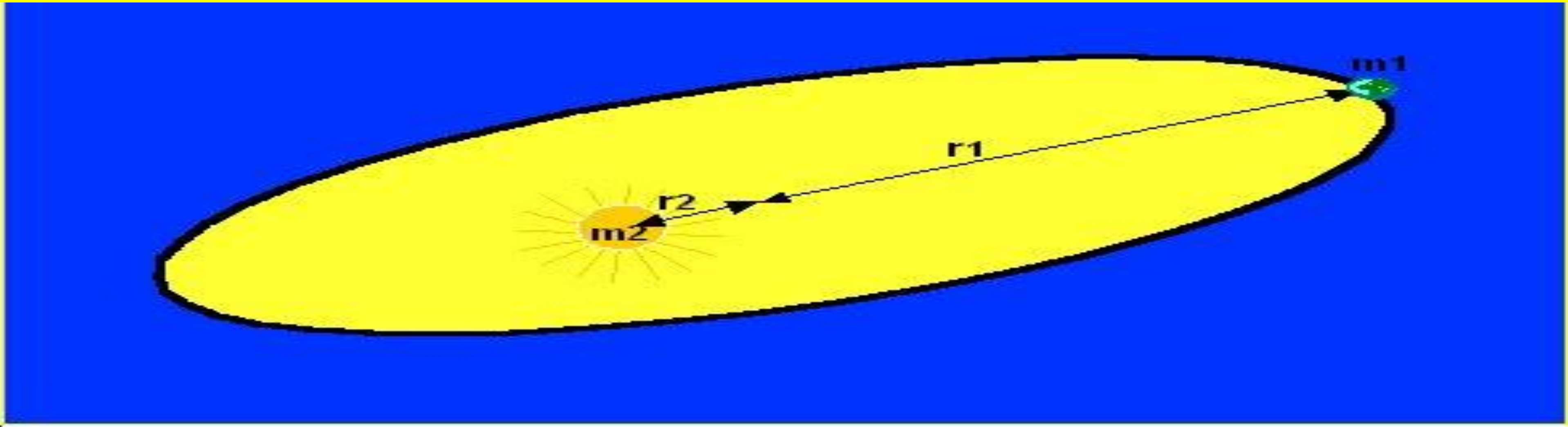
La convention est que le plus petit tombe sur le plus gros

Mais gardons bien à l'esprit que c'est là une pure convention et non une réalité, car c'est avec cette vision égocentrique que nous avons longtemps considéré que c'est le Soleil, et aussi l'ensemble de l'Univers, qui tournent autour de la Terre

Dans la nature les objets non tributaires de contraintes qui leur imposent un emplacement fixe, comme une pomme posée au sol, tournent les uns par rapports aux autres comme la Lune autour de la terre, ou la Terre autour du Soleil. Aussi, appliquée aux corps célestes, la loi de gravitation s'écrit plus souvent comme ceci :

$$F = G\frac{m1\,m2}{r^2}$$

Avec un *r* pour « rayon » à la place du *d* de « distance ». Ce *r* étant lui-même abusif puisque les orbites ne sont presque jamais des cercles mais le plus souvent des ellipses.
Cependant, en raison de leur faible excentricité et aux niveau où nous calculerons ces orbites nous pouvons nous satisfaire de cette approximation. En revanche il y a plus important à comprendre :



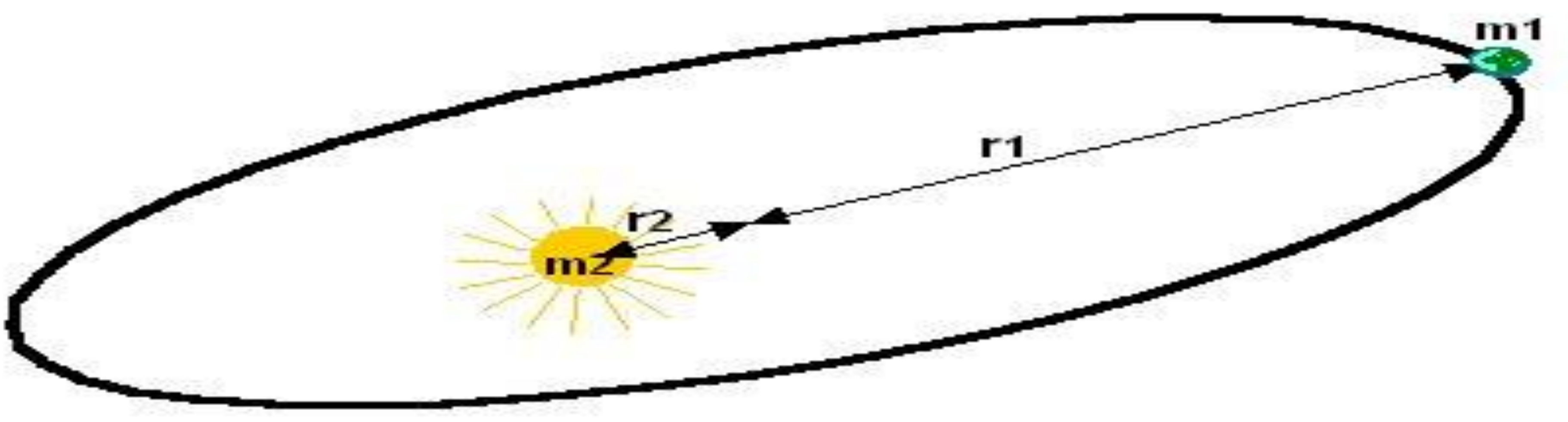
Note : Dans l'équation

$$F = G\,\frac{m1\,m2}{r^2}$$

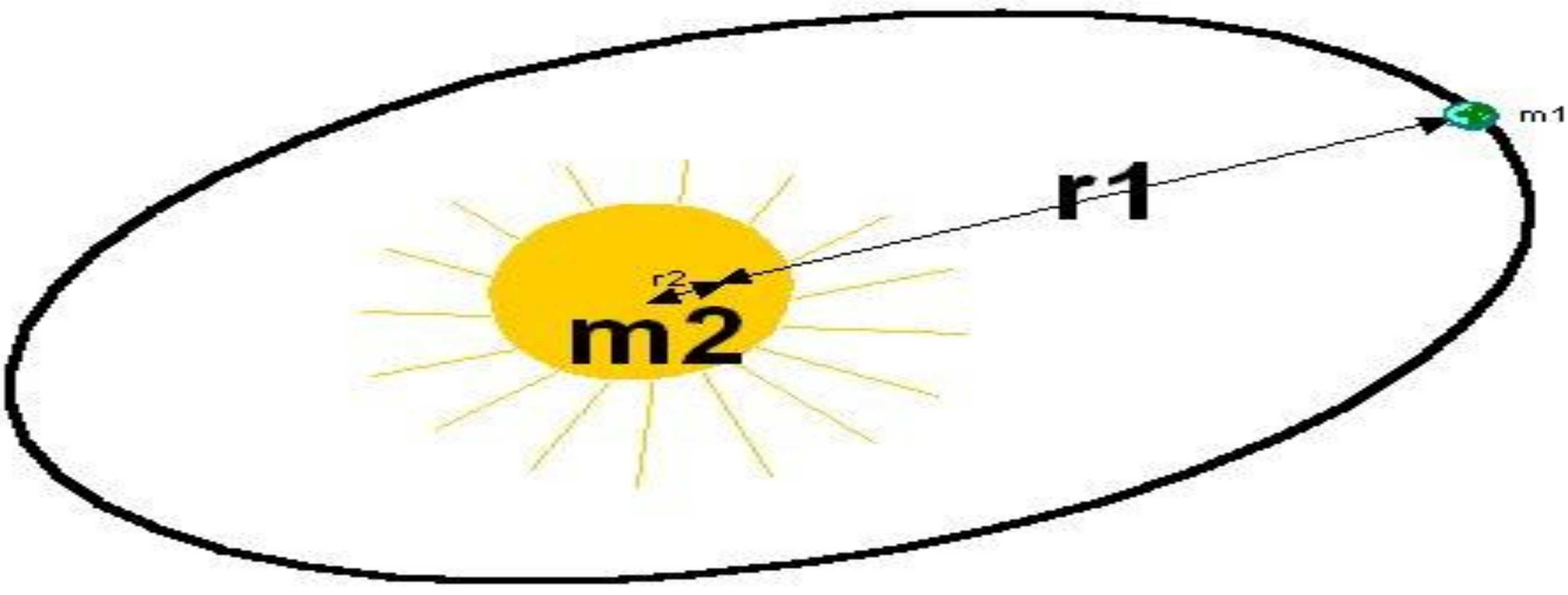
r^2 est en réalité un terme composé (***$(r1+r2)^2$***)

Il existe une identité entre le produit de la masse par la distance des deux objets, ainsi nous avons $m1\ r1 = m2\ r2$

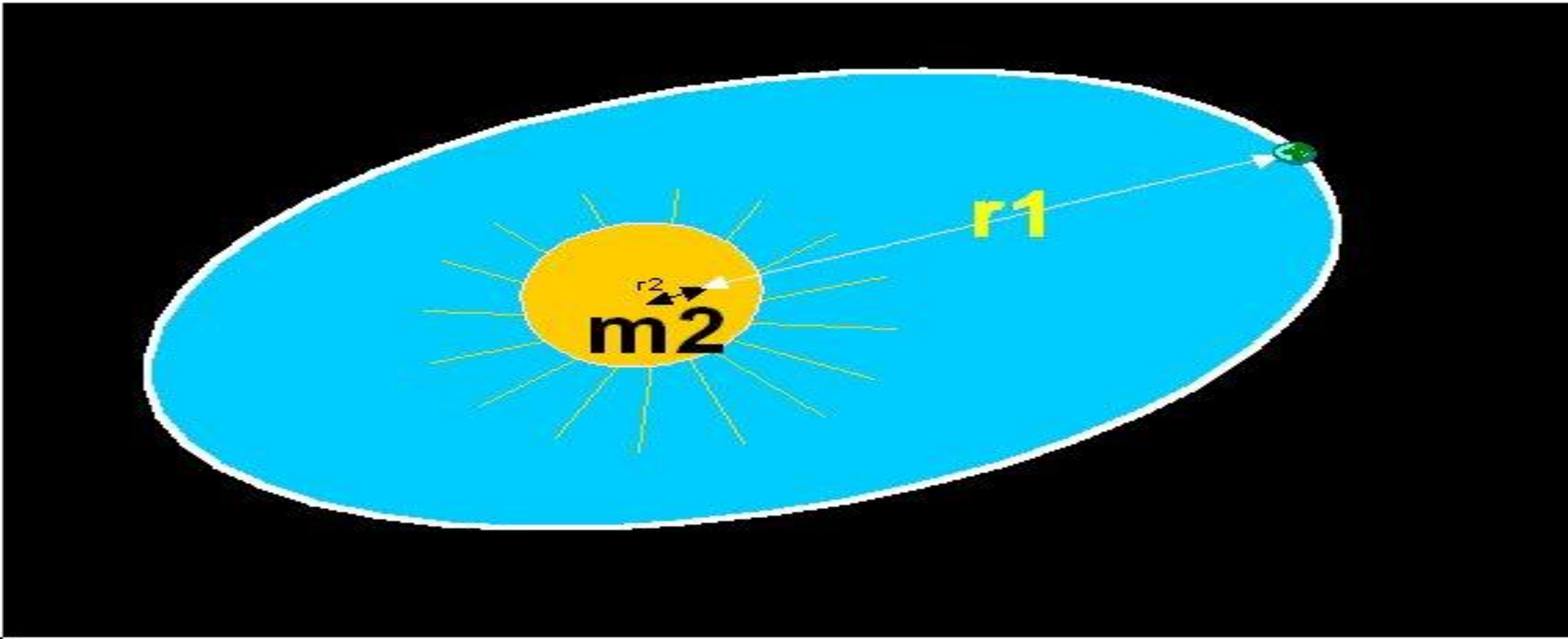
Le point de rencontre entre r1 et r2 se nomme « centre de masse » ou encore barycentre. Il caractérise un point précis dans l'espace autour duquel les deux masses m1 et m2 sont en orbite, et toujours de façon diamétralement opposé . Ainsi il n'est pas rigoureusement exact de dire que la Terre tourne autour du Soleil. Terre et Soleil tournent tous deux autour de ce point immatériel défini par la proportion des masses.



La masse du Soleil étant 333000 fois plus importante que celle de la Terre, la distance du centre du Soleil à ce barycentre commun est 333000 fois plus proche du centre du Soleil que de celui de la Terre. On démontre qu'il se confond avec le centre du Soleil lui-même tant sa masse est importante par rapport à celle de la Terre. Il est facile de déterminer ce point précis en connaissant le rapport des deux masses en présence. 1 à 333000 pour les masse et une distance de 150 millions de km entre le Soleil et la Terre.

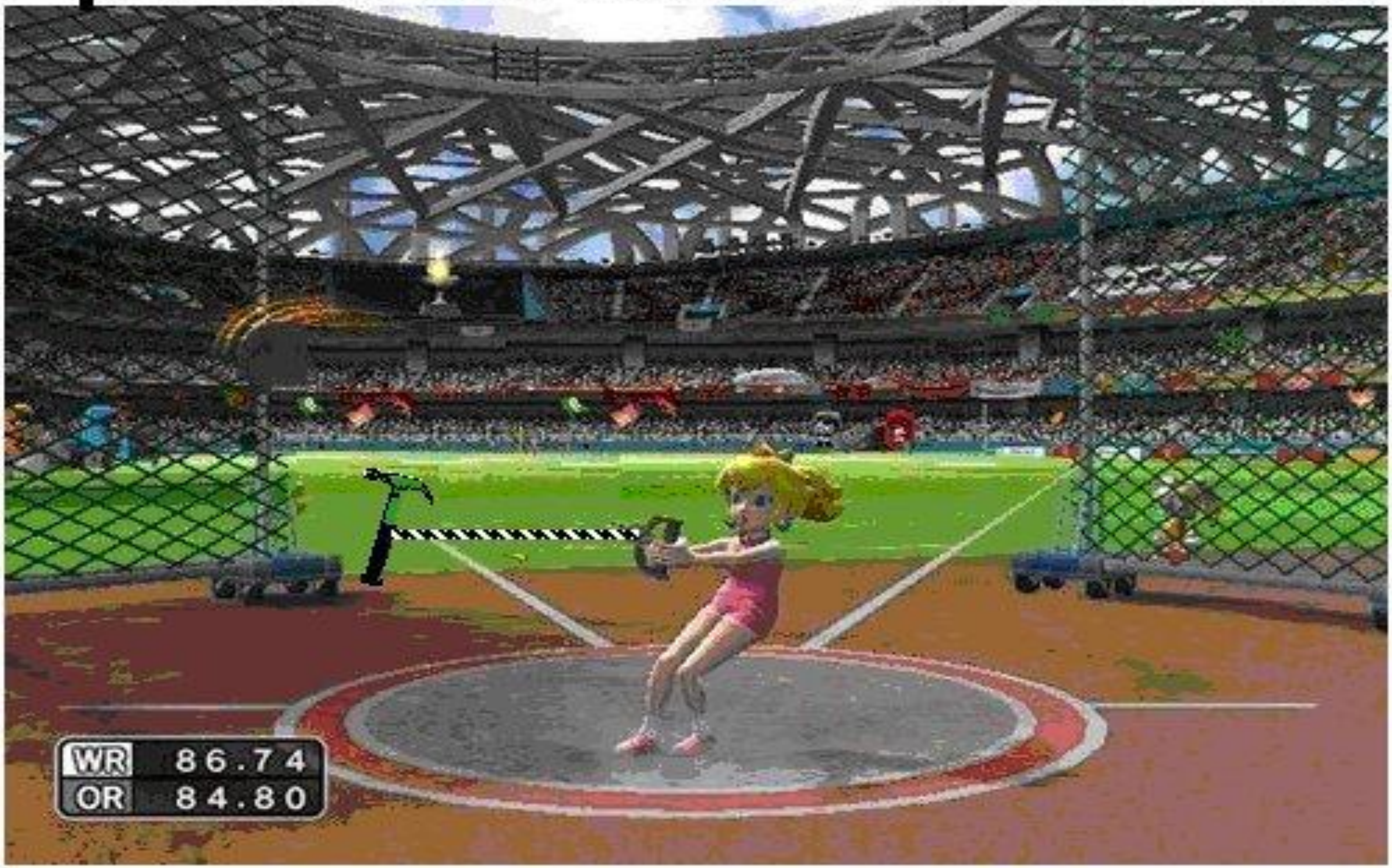


Ce point se trouve donc à 150 000 000 / 333 000 = 450 km du centre du Soleil. Mais comme le rayon du Soleil est de 700 000 km, il est clair que le lieu du barycentre peut être confondu sans dommage avec le centre du Soleil lui-même. Cette distance de 450 km, par rapport à la distance Soleil-Terre de 150 000 000 de km, est toute aussi négligeable, et dans les mêmes proportions que la masse de la Terre, aussi n’en tiendrons nous jamais compte dans nos calculs



Analysons un mouvement bien connu que nous avons tous fait

Epreuve du lancé du marteau



La trajectoire du marteau décrit un cercle

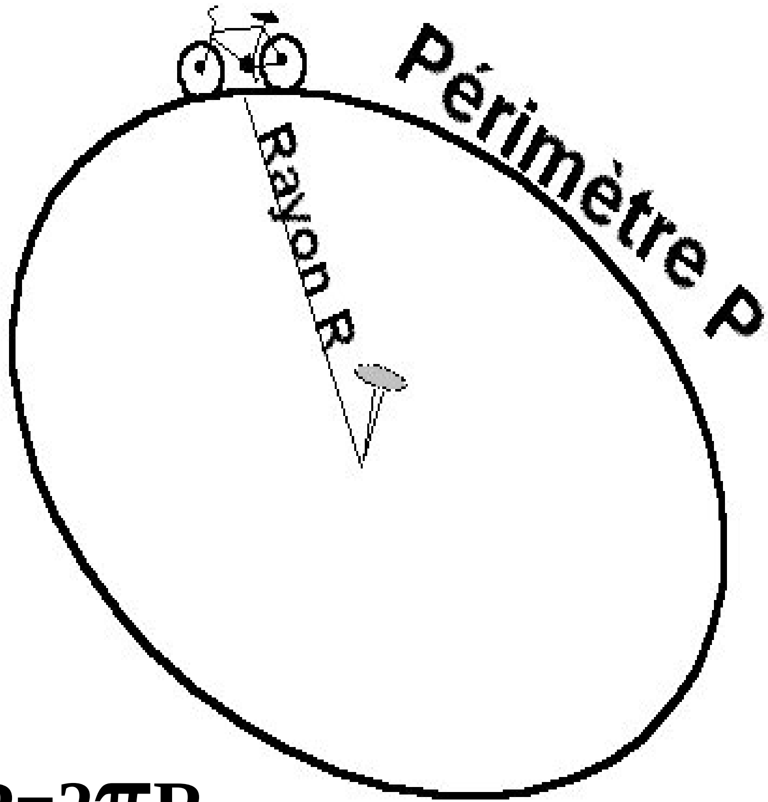
qui ressemble à la trajectoire d'une planète autour du Soleil et la tension de la corde qui le retient est aussi similaire à la force de gravitation

Calcul du périmètre du cercle

Le périmètre du cercle se calcul en multipliant son diamètre **D** par $\boldsymbol{\pi}$:

Périmètre $\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{D} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{2R}$ souvent écrit $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\mathbf{R}$

Vitesse angulaire et Vitesse curviligne Vitesse curviligne, ou linéaire, est ce qui est généralement sous-entendu lorsque l'on parle de vitesse



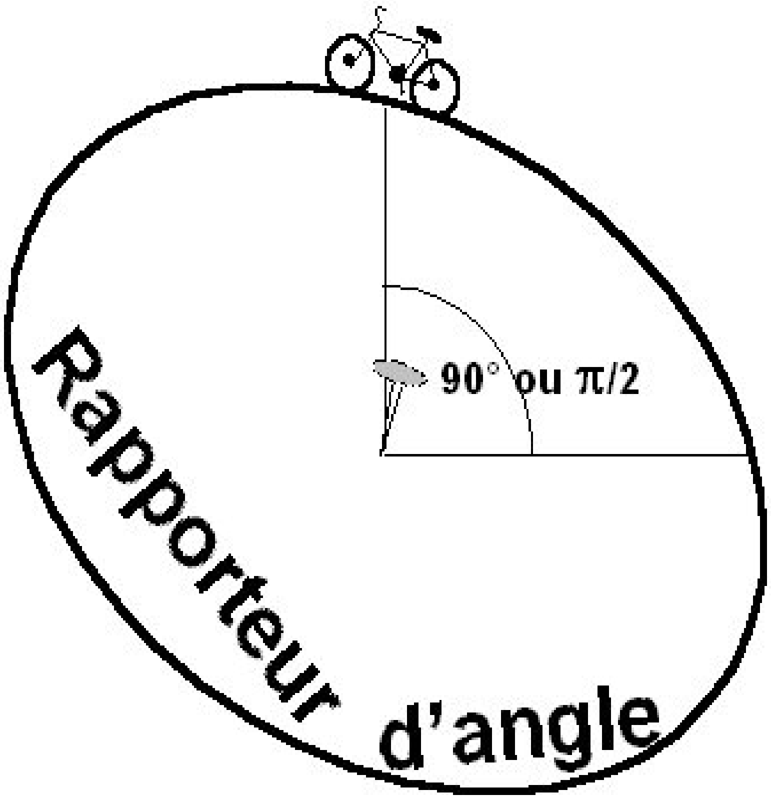
P=2πR

La vitesse (linéaire) du cycliste faisant 1 tour de piste s'obtient en divisant le périmètre par le temps mis à le parcourir :

V = 2πR / t, il s'agit de sa vitesse **curviligne**

La vitesse angulaire

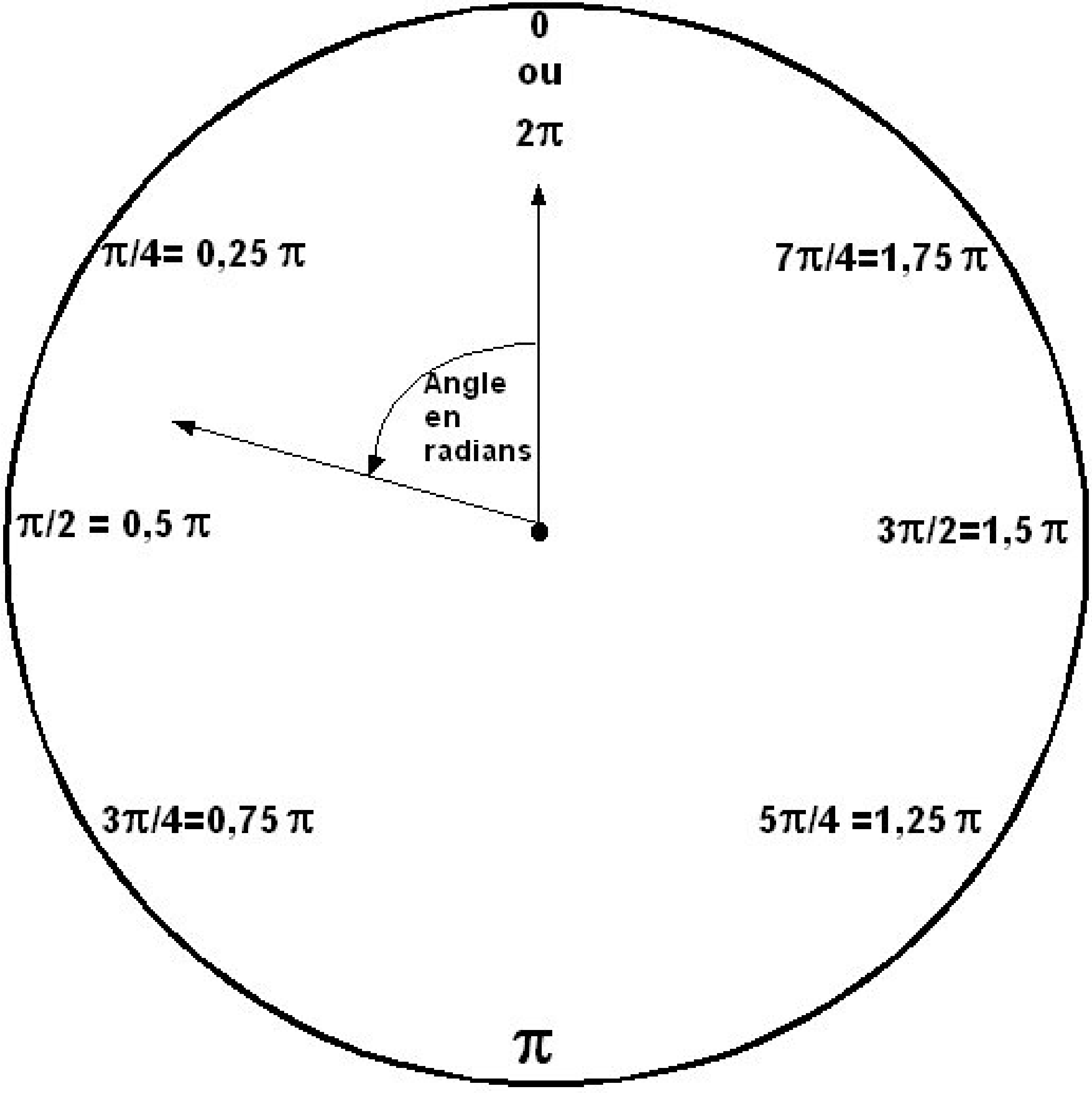
Si l'on considère un rayon de 1 unité on peut l'omettre dans la formule de calcul du périmètre, alors **P = 2π.**



Mais le périmètre pourrait aussi être gradué comme un rapporteur d'angle et s'exprimer en degrés ou dans une autre unité comme le radian.

2π radians représentent un tour complet et correspond à un angle de 360°.On peut donc calculer une vitesse angulaire comme une vitesse curviligne sans tenir compte du rayon du cercle :

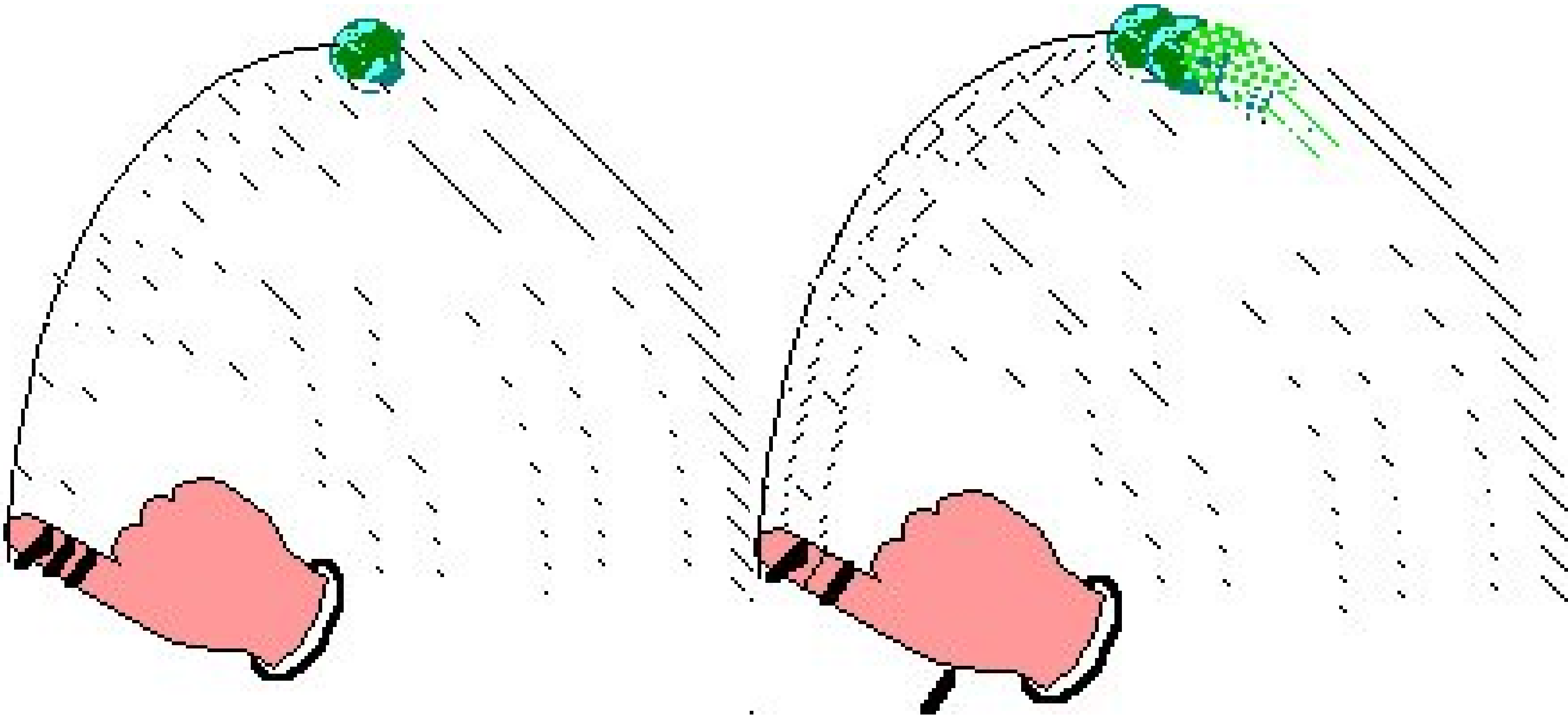
$$V_{ang} = 2\pi / t = \omega$$



Une rotation ou un cercle notée en radians

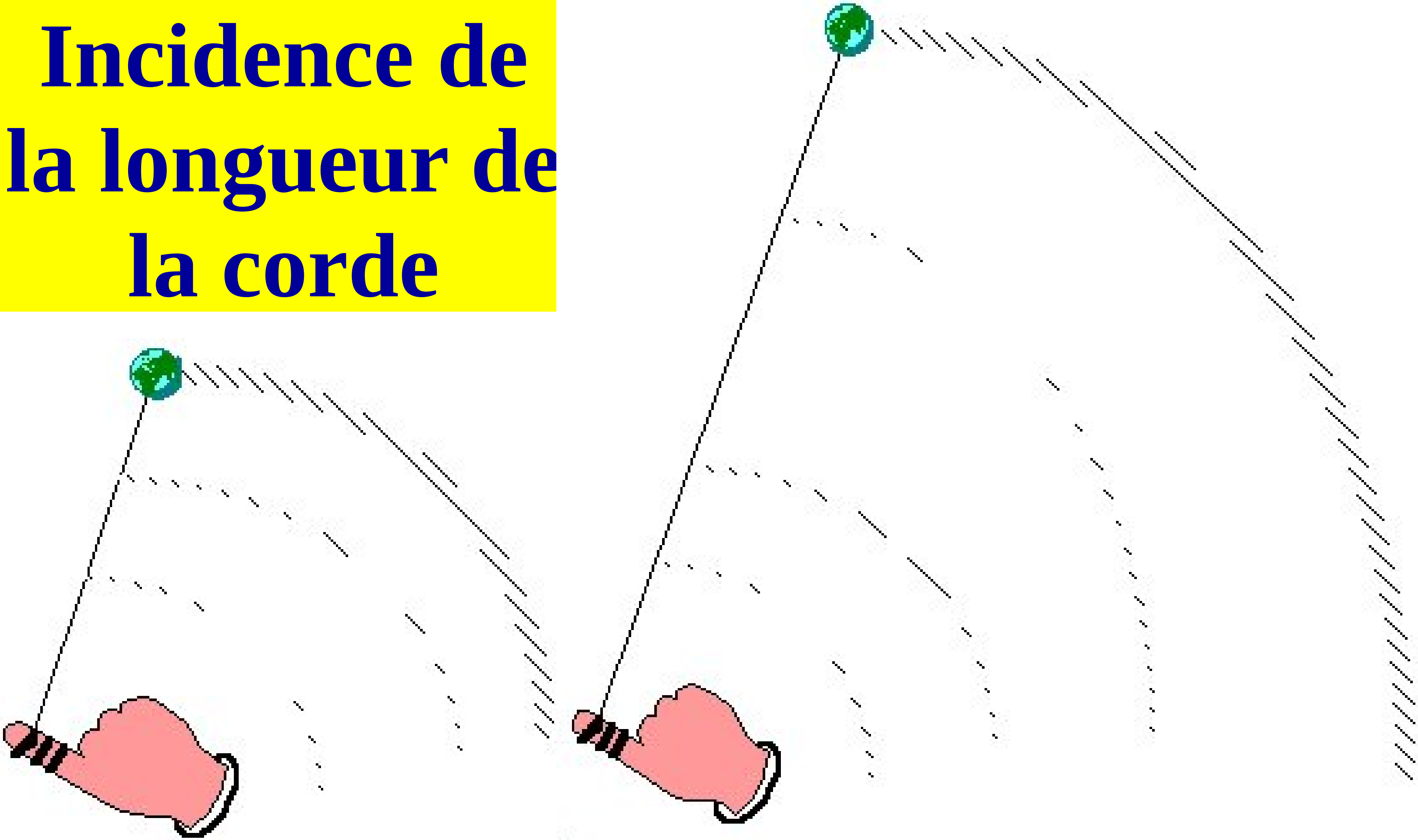
Mais revenons à la vitesse

Incidence de la vitesse imprimée au marteau



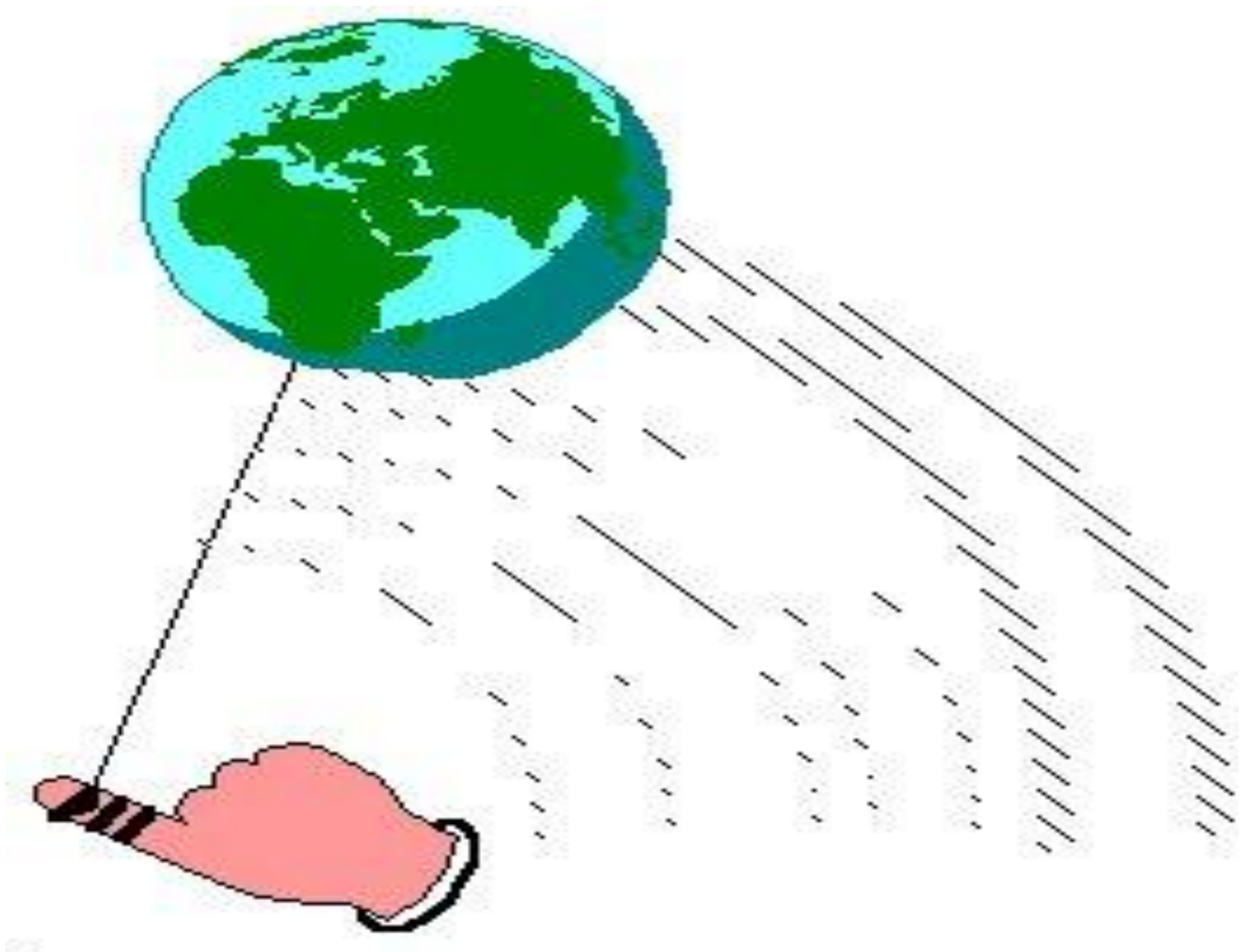
Avec la même masse au bout de la corde et une corde de même longueur, si tous faisons tourner l’ensemble plus vite, que ressentons nous dans le poignet ?

Incidence de la longueur de la corde



Avec la même masse au bout de la corde et en tournant à la même vitesse si la corde est plus longue que ressentons nous dans le poignet ?

Avec la même longueur de corde en tournant à la même vitesse mais avec une masse plus importante



que ressentons nous dans le poignet ?

La tension (la force) que nous ressentons dans le poignet dépend :

1) De la vitesse de rotation

2) De la longueur de la corde

3) De la masse entraînée par la corde

Considérons le mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est une trajectoire qui conduit la Terre à accomplir la totalité de son orbite à la vitesse angulaire ω de

$$\omega = \boxed{\frac{2\pi}{t}}$$

Comme toutes les planètes, la Terre subit une accélération α correspondant au produit du carré de sa vitesse ω par le rayon *r* de son orbite conduisant à l'expression : $\alpha = \omega^2 r$
Nous développons la formulation en utilisant les grandeurs connues de la relation (2π, *r*, et *t*) pour obtenir :

$$\alpha = \boxed{\frac{4\pi^2 r}{t^2}}$$

Le produit de l'accélération□ par la masse m*T* de la terre conduit à la force F

$$\mathbf{F} = \boxed{\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2}}$$

Mais cette force F = $\dfrac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2}$ qui maintient la Terre sur son orbite

est la même que celle de la loi de gravitation $\mathbf{F} = \dfrac{G * m_T * m_S}{r^2}$

Alors $$\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

A partir de cette relation nous avons de nombreuses possibilités.

Par exemple nous pouvons calculer la masse du Soleil à partir des éléments orbitaux de la Terre

$$\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

en divisant les deux membres par G m_T et en les multipliant par r^2 nous obtenons l'équation donnant la masse solaire :

$$\frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2} = m_S = \frac{4\pi^2(1{,}5*10^{11})^3}{(6{,}67*10^{-11})31557600^2} = 2*10^{30}\,kg$$

A partir de cette même relation nous pouvons aussi calculer certains éléments orbitaux de la planète située à la distance *r* du Soleil en transformant la relation pour aboutir à la troisième loi de Kepler expliquée dans la première partie de l'exposé sur la Mécanique Céleste

$$\frac{m_T\, 4\pi^2 r}{t^2} = \frac{G * m_T * m_S}{r^2}$$

Divisons les deux membres de cette équation par $r\ m_T\ \ m_S\ G$ **et multiplions les par** t^2

$$\frac{4\pi^2}{G m_S} = \frac{t^2}{\mathrm{r}^3}$$

Avec les unités du système Internationale, nous avons *t* en secondes et *r* en mètres. Mais si nous choisissons des unités telles que le quotient de chaque membre soit égal à 1 avec par exemple le temps orbital en années et le rayon de l'orbite en UA (Unité Astronomique) nous universalisons la relation en la rendant indépendante des constantes de normalisation de la relation :

$$\frac{t^2}{\mathrm{r}^3} = \frac{1^2}{1^3} = 1$$

ce qui conduit à la relation $t^2 = r^3$

La relation $t^2 = r^3$ permet ainsi de déterminer le temps orbital d'un corps en orbite si l'on connaît la distance qui le sépare du barycentre autour duquel il tourne, ou encore réciproquement, cette distance si l'on connaît la période orbitale

.

Comme il est dit sur la diapo précédente, en choisissant des unités relatives à la position et au temps orbital de la Terre nous simplifions considérablement les calculs tout en nous donnant des grandeurs significatives pour les terriens que nous sommes.

Nous choisissons donc la mesure du temps en années terrestres et la mesure des distances en rayons de l'orbite terrestre c'est-à-dire en UA. Pour la Terre nous avons donc bien $1^2 = 1^3$

Pour Jupiter dont la période sidérale est de 11,862 années nous avons l'identité :

$$11{,}862^2 \text{ années} = 5{,}2^3 \text{ UA}$$

Connaissant la période sidérale nous obtenons la distance au Soleil de

$$\sqrt[3]{11{,}862^2} = 5{,}2\,UA$$

Réciproquement, connaissant la distance au Soleil de 5,2 UA nous obtenons la période sidérale :

$$\sqrt[2]{5{,}2^3} = 11{,}86\,années$$

Mettons ces connaissances à profit

Nous savons que la Lune orbite à la distance moyenne de 384000 km de la terre en 27 jours 1/3 et que celle-ci est 81,3 fois moins massive que la Terre

Nous savons aussi qu'un satellite artificiel qui doit rester en permanence dans le plan méridien (on dit qu'il est géostationnaire) d'un lieu géographique terrestre doit orbiter à 36000 km de la surface du sol.

Questions :

Combien de km fait le rayon de la Terre ?

Où se trouve le barycentre Terre-Lune par rapport au sol ?

Quelle est la masse de la Terre ?

Une question complémentaire pour les matheux

Démontrez qu'une planète quelconque du système solaire, éloignée d'une distance moyenne *d* (exprimée en UA) du Soleil, orbite à une vitesse linéaire égale à *V* (exprimée dans les unités de votre choix, km/s, km/h, m/s…) selon l'équation ci-dessous

$$\frac{Vitesse\ Terre}{\sqrt[2]{d_{planète}(en\ UA)}} = V_{planète}\ (*)$$

(*) vitesse obtenue dans les mêmes unités qu'au numérateur, km ou m par seconde, par exemple.

Pour la dernière question pensez à la troisième loi de Képler, elle vous affranchira du temps

Merci de votre aimable attention

Y a-t-il des questions ?